

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
Departamento de Teoría Económica



TESIS DOCTORAL

Una revisión de la economía ricardiana

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Eusebio Aparicio Auñón

DIRECTOR:

Enrique Lozano Rodríguez

Madrid, 2015

R.65361d

Eusebio Aparicio Auñón

T 634



UNA REVISION DE LA ECONOMIA RICARDIANA

Departamento de Teoría Económica
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
1980

© Eusebio Aparicio Auñón
Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-36109-1980

N.C. X-48-005471-0
N.E. 4800143681

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS
DEPARTAMENTO DE T. ECONOMICA
-000-

UNA REVISION DE LA ECONOMIA RICARDIANA

Trabajo presentado por Eusebio
APARICIO AÑON, para optar al
grado de Doctor.
Dirigida por el Dr. D. Enrique
LOZANO RODRIGUEZ.
Agosto de 1979

"Mi querido amigo, toda teoría
es tan seca como verde y lozano
es el árbol de la vida"

(Mefistófeles al Estudiante)

INTRODUCCION

Durante muchos años, el tema clásico de la distribución del producto en una sociedad capitalista ha permanecido esclavo de la función de producción. La función neoclásica de producción tenía el atractivo de ser una instancia impersonal que resolvía los conflictos distributivos de una forma exacta, desapasionada, y extrañamente concorde con lo que en realidad se venía haciendo en cada lugar y en cada momento. Daba en cierta manera 'explicación científica' a la existencia de grandes masas de población hambrienta en los cinco Continentes. Y con ello contribuía a paliar en términos de teoría la monstruosa simbiosis de opulencia y miseria, que constituye la forma normal de distribución en la mayor parte del mundo llamado civilizado.

Al poner de manifiesto los inconvenientes lógicos de esta teoría, la crítica de Cambridge ha rendido un doble servicio a la teoría económica.

En el plano metodológico, ha sabido adentrarse en un problema candente sin levantar las pasiones y prejuicios que en su día suscitaron el marxismo y otras corrientes de pensamiento radical. En esencia, ha aplicado un principio muy simple, que puede enunciarse así : si una teoría es meramente una racionalización, ello ha de verse en que tiene que producir en algún punto dificultades lógicas. A los efectos de la teoría, con esto basta.

En segundo lugar, la moderna crítica ha rescatado para la teoría una vieja idea del modelo ricardiano: la idea de que los términos en que se distribuye el producto en una sociedad capitalista no vienen impuestos por la *mano invisible* del equilibrio competitivo. Este último puede presentarse con situaciones distributivas harto diferentes. La brecha abierta por este principio de indeterminación puede hacer perder felizmente al economista la comodidad de la precisión mecanicista en el uso de las ideas a que le han acostumbrado las estadísticas. Pero la sociedad, en cambio, puede ganar un grado de libertad en sus ecuaciones distributivas. Y esto le debería permitir en principio un amplio margen de maniobra en la construcción de su propio futuro económico.

El presente estudio aspira a estar en la línea de esta corriente de pensamiento que entronca directamente con David Ricardo. Presenta un modelo -esperemos que coherente- de la distribución capitalista, ensanchando en algunos aspectos los supuestos de Ricardo, pero conservando como eje fundamental de toda la construcción la distinción entre la economía básica y la no básica dentro del sistema capitalista.

En el Capítulo I se recogen algunos datos históricos que ilustran en qué consistía esta distinción en tiempos de Ricardo y cuál es su trasfondo social.

Un resumen del modelo teórico ricardiano se encontrará en el Capítulo II.

En los Capítulos III y IV se revisan algunos supuestos del modelo. En el primero de ellos, el relativo a la economía no básica; y en el otro, el de formación de un tipo de beneficio uniforme, el de existencia de rendimientos constantes a escala, y el relativo a los rendimientos decrecientes de la tierra.

En el Capítulo V presentamos el modelo central de simbiosis de los dos sectores de la economía, utilizando a tal fin ecuaciones del tipo Lotka-Volterra.

La existencia y propiedades de la solución de equilibrio se estudian en los dos capítulos siguientes. Los teoremas de imposibilidad de la solución dual, de Samuelson-Modigliani, examinados en el Capítulo VI, si son correctos pueden no estar exentos de interés.

En el Capítulo VIII se revisan, a la luz de los recientes desarrollos, los teoremas ricardianos del valor y del crecimiento, explorando las posibilidades que ofrece la mercancía patrón para el estudio del crecimiento equilibrado y de la teoría de la explotación. De esta manera se deja preparado el camino para desarrollar, en los tres últimos capítulos del trabajo, algunos modelos de producción conjunta en los que la relación entre la tasa de explotación y el tipo de beneficio cobra especial relevancia en la determinación del equilibrio.

Como era de esperar, sólo ha podido ser estudiada una diminuta parcela del vasto campo acotado en un principio. Las alarmantes proporciones adquiridas por los temas seleccionados, han impuesto en un determinado momento la brusca interrupción de nuevas iniciativas. En cualquier caso, la incursión por la literatura económica moderna y el esfuerzo por aclarar las propias ideas, ha sido un ejercicio agradable de protección contra uno de los pocos -y más temibles- bienes libres que quedan todavía: el aburrimiento.

Agradezco al Prof. E. Lozano haberme animado a realizar este trabajo, orientándolo y soportándolo con generoso estoicismo. Mi interés por los temas aquí tratados se remonta a su Curso de Doctorado de 1972-73 sobre "Crítica a la Teoría Marginalista del Capital y de la Distribución". Desde entonces me he beneficiado libremente de sus ideas y de sus diversas contribuciones al debate. Dada la parquedad de mi propia aportación -de cuyos errores y limitaciones soy yo el único responsable-, será para el Prof. Lozano un consuelo pensar que las páginas que siguen son solamente el subproducto de una dedicación amistosa, de la que he aprendido algo más que economía.

INDIC

Cap. I : UNA OJEADA AL PASADO: 1.1. La independencia de las colonias americanas. 1.2. El nuevo imperio colonial. 1.3. El comercio ultramarino. 1.4. La Revolución francesa y su modelo económico. 1.5. La Primera Revolución Industrial. 1.6. La clase obrera.....	1
Cap. II : EL NUCLEO INICIAL DE LA TEORIA RICARDIANA : 2.1. Las condiciones generales del modelo 2.2. Los teoremas del modelo.....	11
Cap. III : LA ECONOMIA NO BASICA : 3.1. La distinción teórica 3.2. Propiedades del sistema industrial no básico 3.3. El fenómeno no básico del maquinismo: A) Efectos del maquinismo sobre la producción de alimentos B) Efectos del maquinismo sobre el empleo 3.4. Conclusión.....	15
Cap. IV : EL CAMINO HACIA EL EQUILIBRIO : LA FORMACION DE UN TIPO UNIFORME DE BENEFICIO: 4.1. El tipo de interés y la uniformidad de los beneficios 4.2. Beneficios normales y tipo de beneficio uniforme 4.3. Tipo de beneficio uniforme y rendimientos constantes a escala 4.4. La igualación de los tipos de beneficio básico y no básico 4.5. Las rentas y los rendimientos decrecientes de la tierra 4.6. Conclusiones del modelo 4.7. El estado estacionario.....	26
APENDICE MATEMATICO.....	38
Cap. V : UN MODELO DE CRECIMIENTO CICLICO : 5.1. Los supuestos 5.2. El modelo 5.3. La sincronización con el sector básico 5.4. Generalización del modelo utilizando curvas de salario efectivas.....	39
APENDICE MATEMATICO.....	48
Cap. VI : EL TIPO DE BENEFICIO DE EQUILIBRIO : 6.1. La ecuación de Cambridge 6.2. La ecuación dual de Meade-Samuelson-Modigliani 6.3. Simetría formal de ambos teoremas 6.4. Imposibilidad de la ecuación dual con un reparto positivo 6.5. Imposibilidad de la ecuación dual con un tipo de beneficio positivo 6.6. Otros resultados sobre el tipo de beneficio de equilibrio.....	50
APENDICE MATEMATICO.....	59

Cap. VII : EL CAPITAL DE EQUILIBRIO : 7.1. La medición del capital per capita 7.2. El capital per capita de equilibrio 7.3. La productividad marginal del capital.....	62
Cap. VIII : LA MERCANCIA PATRON Y EL CRECIMIENTO EQUI- LIBRADO : 8.1. La mercancía patrón 8.2. La mercancía patrón y la distribución de equilibrio 8.3. El crecimiento equilibrado de von Neumann 8.4. El crecimiento equilibrado con dos clases sociales 8.5. El camino geodésico de Ramsay 8.6. La teoría de la explotación y la mercancía patrón.....	68
Cap. IX : LA PRODUCCION CONJUNTA : 9.1. Descripción técnica 9.2. El modelo $pA=ppB$ 9.3. Teorema Ampliado de Frobenius 9.4. Algunas particularidades de la producción conjunta 9.5. Los supuestos de von Neumann 9.6. Aspectos no básicos de la producción conjunta...	80
Cap. X : LA EXPLOTACION Y LA PRODUCCION CONJUNTA : 10.1. El modelo completo 10.2. Propiedades del modelo 10.3. Conclusiones.....	90
Cap. XI : EL MODELO GENERAL DE SRAFFA : 11.1. La especialización industrial en la producción conjunta 11.2. Producción conjunta con cuasiespecialización industrial 11.3. La tasa de explotación y el equilibrio del sistema 11.4. La curva de salario en producción conjunta 11.5. Método de obtención de la curva de salario.....	97
NOTAS A LOS CAPITULOS.....	112
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	133

CAPITULO 1 : UNA OJEADA AL PASADO

Pocas épocas en la Historia pueden compararse en lo turbulento y profundo de la transformación social y en la actividad de la creación intelectual, con los tiempos que le tocó vivir a David Ricardo (1772-1823).¹

Fueron los tiempos de Beethoven y de Goya; de Goethe, de Coleridge; de Shelley; Byron y Keats; de Shopenhauer y Hegel. La época del viejo Kant o del viejo Hydn; de Scott y de Robert Burns. Los ejércitos los organizaban L. Carnot, G. Washington, S. Bolívar o Wellington. Los de Napoleón chocaban con la escuadra de Nelson. En el Parlamento polemizaban Pitt y Fox, Canning y Castlereagh, Wilberforce y los defensores de la esclavitud. Alrededor de una misma mesa de conferencia se reunían hombres que se llamaban Talleyrand, Castlereagh, Metternich, Federico Guillermo y Alejandro; o bien, Thomas Jefferson, John Adams, James Wilson, B. Franklin, Alexander Hamilton.... La matemática la hacían Gauss, Lagrange, Fourier, Legendre; la astronomía, Laplace; la biología, Lamarck; las ciencias naturales, Cuvier y Humbolt; la historia, Gibbon y B.G. Niebuhr. Fue también una época de aventureros, panfletistas y reformadores religiosos; la edad de oro de los Lafayette, Thomas Paine y Priestley. Para socialistas, como Thomas Hodgkins, y arbitristas al estilo de Saint-Simon, Owen y el mismo Benthan. Tiempos, en suma, agitados y convulsos, que hicieron rodar por igual la cabeza huera de Luis XVI y la ilustre de Antoine Lavoisier. En medio de las revoluciones, aventuras y de los grandes negocios; de la crispación jacobina y de la implacable reacción, la figura de David Ricardo se perfila sobre el fondo del radicalismo liberal inglés, como un testigo sereno y discreto de la primera Revolución Industrial: pensador juicioso en cada momento; penetrante en el análisis del capitalismo en formación; amigo de dejarse guiar por la razón y de no retroceder ante sus propias conclusiones teóricas.

Tres grandes acontecimientos conmovieron el mundo de David Ricardo contribuyendo a forjar una nueva concepción de la vida. La independencia de las colonias americanas, de donde arrancó paradójicamente la construcción del nuevo imperio colonial británico, con su vasta red de mercados mundiales para las manufacturas inglesas.² La Revolución Francesa, ante cuyo empuje se desplomó el 'ancien régime' y desaparecieron las trabas feudales que atenazaban

el comercio y la industria. Y por último, pero no menos importante, la Revolución Industrial, cuyo gran invento fué el sistema de trabajo en fábricas y su gran producto, la clase obrera.

1.1.- La independencia de las colonias americanas

La revolución americana se puso en marcha en el mismo año del nacimiento de Ricardo. En 1772 estalla la crisis económica latente en las Colonias del Norte desde el Tratado de París, de 1763, en virtud del cual Inglaterra ocupó el Canadá francés, la Florida, y todo el territorio que se extiende desde los Alleghenys hasta el río Mississippi. Las deudas acumuladas durante la guerra impidieron financiar la creación de nuevos canales comerciales en los territorios recién adquiridos. La asimilación de los francocanadienses, el control de los indios, y los establecimientos al otro lado de los Alleghenys, requerían grandes sumas de dinero que se pretendió recaudar dentro de las propias Colonias, unas veces con impuestos (el 'Sugar Act' de 1764, el 'Stamp Act' de 1765, los 'Townshend Duties' de 1767), y otras imponiendo restricciones al comercio de Nueva Inglaterra con las Indias Occidentales. Para 1772, muchos granjeros del interior de Massachusetts estaban arruinados, lo mismo que los plantadores de tabaco de Virginia. Los últimos privilegios concedidos a la Compañía de las Indias Orientales para que pudieran reexportar a las Colonias americanas, con devolución de impuestos, el té almacenado en Londres, hundió el floreciente contrabando de té holandés en Nueva York. Finalmente, las llamadas 'Intolerable Acts', de 1774, supuso el colapso del puerto de Boston. El resultado de la crisis económica fué la Declaración de Independencia de 1776; y el resultado de la Declaración de Independencia, el Imperio Británico.

1.2.- El nuevo imperio colonial

Para sustituir a las colonias americanas como lugar de destierro de los convictos, Inglaterra ocupó Nueva Gales del Sur en 1788. Tasmania, en 1803, se convirtió en otro establecimiento para convictos. En ese mismo año, quiebra definitivamente la resistencia de los Marathas en la India, extendiendo sus conquistas desde Bengala, la provincia que ganara Robert Clive, en Plassey. Para facilitar el paso hacia la India se establece en el Cabo de Buena Esperanza. El Tratado de Amien (1802) le concede Trinidad y Ceylan; y el de París,

de 1814, las plazas estratégicas de Tobago, Mauritius, St. Lucía y Malta. La Compañía de las Indias Orientales, unas veces mediante tratados y otras por la fuerza, ocupa Agra y Oudh, East Bengal y Assam; y en 1795, Sir Thomas Stamford Raffles gana para la 'Compañía' el puerto de Singapore. Mientras tanto, Inglaterra se había ido extendiendo por las fértiles y casi despobladas tierras del Oeste de Canadá.

La crisis de sobreproducción de la economía azucarera en las Indias Occidentales, había llegado a una situación extrema. Tratando de resolverla, Inglaterra prohibió el tráfico de esclavos en 1807, indemnizando a los dueños de las plantaciones con un dinero que no tardó en volver a Londres para saldar las deudas contraídas con los banqueros de la City. Es precisamente a partir de 1807 cuando el tráfico esclavista alcanza su mayor auge. Los barcos negreros se dirigían ahora hacia Cuba y Brasil, y sobre todo a las prósperas plantaciones de algodón de los EE.UU., suministradoras de materia prima a las infatigables fábricas de Manchester y Liverpool. Para impedir este nuevo tráfico, Inglaterra se establece en Sierra Leona, en 1808; Gambia, en 1816 y Costa de Oro, en 1821.

1.3.- El comercio ultramarino

Es imposible dejar de ver en esta formidable expansión de las áreas comerciales y de las fuentes de suministro de materias primas, la fuerza que transformó el modo de producción británico y su estructura de clases.

Conviene tener una idea clara de la organización del comercio inglés en tiempos de Ricardo.³ Tradicionalmente, al igual que la mayoría de los países preindustriales, Inglaterra había sido exportador de una sola mercancía: lana. Todavía a mediados del siglo XVIII los tejidos de lana representaban la mitad de las exportaciones británicas. Esta situación se modificó con el comercio americano del azúcar, el tabaco, el algodón, el índigo y las maderas nobles. Estas mercancías eran importadas a Inglaterra y reexportadas al Continente europeo. El volumen de estas reexportaciones creció sin cesar durante la segunda mitad del siglo XVIII, dotando a la economía británica de los medios de pago necesarios para suministrarse de la madera, la brea y el cáñamo de los países bálticos, necesarios para su industria de construcción naval; traer de Suecia y de Rusia el mineral de hierro para la industria de este metal; la seda para la industria textil; y en ocasiones el trigo, para superar una mala cosecha.

Para financiar los productos tropicales -pivote inicial de las restantes transacciones comerciales- Inglaterra vióse obligada a montar un complicado sistema de relaciones mercantiles, con centro en Londres, cuyo funcionamiento se reducía fundamentalmente a intercambiar en Africa armas, herramientas, y licores británicos, por esclavos, oro, y marfil. Los esclavos seguían su ruta hasta América, donde se cambiaban por los productos tropicales. El oro y el marfil se transportaba al Oriente, para comprar el té, la seda, calicoes, café y especias.

Nunca se había conocido un negocio tan lucrativo como éste de comerciar en los mercados extranjeros con mercancías extranjeras. Un 15% de beneficio era normal para esta clase de transacciones. El capital fluía con facilidad a estos negocios. El mercado de dinero de Londres se convirtió "en el mejor lugar del mundo para encontrar créditos en términos razonables o para invertir el capital en condiciones lucrativas"⁴. Después de las guerras con Francia, que hicieron perder a Amsterdam su hegemonía comercial, Londres se convirtió en el centro financiero indiscutible de todo el comercio mundial.

Al mismo tiempo fueron apareciendo las primeras industrias de productos para la exportación, fundamentalmente la del algodón. Antes de finalizar la primera década del siglo XIX, el algodón había desplazado a la lana como primer producto de exportación. Se ha estimado que durante la segunda mitad del siglo XVIII la exportación de productos domésticos se multiplicó por 2 ó 2.5, mientras que la reexportación de productos extranjeros se triplicó, aproximadamente.

El nuevo sector de industrias para la exportación, inducido por el 'boom' del comercio mundial, revestía unas características muy diferentes a las del sector de industrias domésticas. Como escribe Hobsbawm,⁵ "las industrias de exportación trabajaban en condiciones muy diferentes y potencialmente mucho más revolucionarias. Fluctuaban tremendamente - hasta un 50% en un solo año- de tal forma que el fabricante que se apresuraba a coger las rachas de la expansión podía inflarse. A largo plazo estas industrias se expandieron también mucho más y más rápidamente, que los mercados internos. Entre 1700 y 1750 las industrias domésticas incrementaron su producción un 7%, las industrias de exportación un 76%; entre 1750 y 1770 (que puede considerarse como la fase de embalamiento para el 'despegue' industrial) otro 7%, y un 80% respectivamente. La demanda interna crecía; pero la demanda exterior se multiplicaba".

1.4.- La Revolución Francesa y su modelo económico

Menos fortuna tuvo el siguiente gran acontecimiento de la época -la Revolución Francesa- en su intento de troquelar la economía no sobre el principio del beneficio y la libertad mercantiles, sino sobre el principio del beneficio y la libertad populares. En este sentido dejó escasa huella en el pensamiento económico posterior, y ninguna que sepamos en los escritos ricardianos. Si lo mencionamos aquí es a título de ocasión perdida hacia una sociedad que hubiera sido muy distinta de la actual.

Los revolucionarios franceses tuvieron la decisión de poner en práctica lo que habían aprendido del pensamiento liberal del siglo XVIII. Al hacerlo así, rompieron los lazos que habían tenido sujeta durante siglos a la vida feudal. En su lugar pusieron la libertad individual -un derecho natural inalienable sólo limitado por la libertad de los demás- con la categoría de principio informativo de la nueva reconstrucción social. Libertad frente a las acusaciones y los arrestos arbitrarios; libertad de expresión y de imprenta; libertad de cultos y de conciencia. Estos ideales son de muy distinta naturaleza a los de los libremercantilistas escoceses y manchesterianos. La libertad económica ni siquiera se menciona en la Declaración de Derechos de 1789. Pero lo más sintomático es que durante la etapa en que el movimiento revolucionario tuvo carácter popular -la llamada 'Segunda Revolución', de 1792⁹ y no meramente burgués, se improvisase un sistema de *economía dirigida*, fundado en la reforma agraria; en la confiscación de las fincas eclesiásticas y su asignación a los municipios contra títulos ordinarios e hipotecarios (los famosos 'assignats' y los 'mandatos territoriales', que llenaron la historia financiera de la revolución); en la derogación de gran parte de la imposición indirecta y creación de nuevos impuestos para la tierra y los bienes de lujo; en la nacionalización de diversas industrias, como las de armamento, material de guerra y comercio exterior; en un recorte sustancial a los sacrosantos privilegios de la propiedad privada (autorizando, por ejem., la incautación de las propiedades de los conscriptos); en el establecimiento, en fin, de un estricto control de precios y de rentas -el llamado 'Maximum Generale'-, en virtud del cual se pusieron precios máximos a los artículos de primera necesidad y a los salarios, se fijó un techo a los beneficios del comercio al por mayor (5%) y al detall (10%), y se arbitró un sistema impositivo para frenar la inflación y truncar los beneficios abusivos.

Así, pues, la Revolución Francesa no produjo, como podría creerse, la experiencia de una economía libre (en el peyorativo sentido moderno), sino por el contrario el primer modelo conocido de una economía controlada. Los ideales de la Revolución Francesa nada tenían que ver con la libertad de mercados propugnada en Londres por Alexander Baring en nombre de todos los comerciantes. Todo el confusio nismo vino de que, al aprovechar la burguesía triunfante los servicios rendidos por la Revolución, empezó a enseñar que la palabra 'li bertad' en realidad no significaba otra cosa que 'libre competencia'.⁷

1.5.- La Primera Revolución Industrial

Siempre ha existido la idea de que hay una parte del sistema económico que es más fundamental que las demás por ser, por decirlo así, la que soporta el peso de todo el edificio. Antes se había dicho que la riqueza se originaba en la aprehensión comercial de los metales preciosos (mercantilismo); en la agricultura capaz de generar un 'produit net' (fisiocracia); en el trabajo productivo (A. Smith)⁸; y hasta en el trabajo improductivo y el lujo (Mandeville, Malthus). David Ricardo se limitó a constatar que la imponente superestructura de las fábricas textiles⁹ surgidas alrededor de Manchester, Glasgow, Liverpool, y otras ciudades en rápida expansión, abastecedoras de un inagotable mercado exterior, podían inducir, como de hecho estaba ocurriendo, una propagación de la actividad económica a otros sectores complementarios... pero sólo hasta cierto punto. Los productos textiles, como output, y el carbón, como input, tenían que ser transportados a bajo coste y ello requería masivas inversiones de capital en puertos, caminos¹⁰, puentes y canales.¹¹ Para poder situarlos en puntos remotos se precisaba una industria naval, que funcionaba con materias primas de importación. La escuadra británica tenía que proteger estos transportes y asegurar las comunicaciones hasta los últimos rincones de la complicada red comercial manipulada desde Londres por un enjambre de mercaderes ansiosos de la llegada de un cargamento o de la transmisión de una noticia; y todo ello fomentó la industria que transformaba el hierro sueco en cañones, armas y municiones para los barcos.¹² Esta industria a su vez requería carbón. Y así sucesivamente, naípe a naípe, el entusiasmo inversor y la revolución tecnológica fueron construyendo el gran castillo industrial. La pujanza de la industria textil se propagaba a otras actividades igualmente rentables para el capital. Ricardo advirtió sencillamente que este proceso de ex-

pansión de los beneficios tenía que tener un fin. Las nuevas industrias se apoyaban unas en otras; y en este sentido el desarrollo logrado tenía cierta coherencia. Todas las industrias más o menos directamente ligadas a los mercados exteriores se reforzaban mutuamente. No eran los naipes los que estuviesen mal colocados. Era todo el castillo -todo el sistema no básico creado por el comercio y la revolución industrial- el que reposaba sobre una base muy frágil: la economía de subsistencia de los trabajadores.

Los ejércitos reclutados por las fábricas tenían que ser alimentados, vestidos, calzados, y alojados. Pero las actividades que suministraban estos bienes básicos para la subsistencia del trabajador -y por ende para el funcionamiento de todo el sistema- producían penosamente, siguiendo los métodos tradicionales, marginadas del torbellino de la revolución tecnológica y del dinamismo de los mercados coloniales y europeos. La mayor parte de los productos necesarios procedían de la tierra. Y en la agricultura, a la sazón, no se había producido ningún cambio espectacular en las técnicas de producción. El arado triangular, ideado por Rotherham en 1730, no desplazó al tradicional hasta los años 1820. Y éste fué tenido como el mayor invento ocurrido en la agricultura desde la Edad del Hierro. Las mejores técnicas de la época, que a veces menciona Ricardo en algunos de sus ejemplos, consistieron en la rotación de cultivos, que evitaba los barbechos, alternando las leguminosas y el pasto con el cereal, y en el descubrimiento de que los nabos y las patatas, así como el pastizaje natural del ganado, regeneraban la fertilidad de la tierra. Por lo demás, como informa P. Deane, los arrendatarios, que representaban quizá el 80% del suelo cultivado, "no tuvieron ni el incentivo ni el capital para experimentar, e incluso los más eficientes y ricos de los grandes propietarios de tierras dudaron, por razones políticas y sociales, introducir maquinaria ahorradora de trabajo en unas áreas rurales deprimidas por el crónico subempleo".¹³

Esta imagen de un capitalismo estratificado en un sistema básico soportando una superestructura ciclópea de bienes de lujo o no-básicos, puede apreciarse leyendo los "Principles" de Ricardo. A los bienes básicos alude utilizando expresiones muy variadas, pero de significado inequívoco: "food and necessities", "food and necessities on which the wages of labour are expended", "all the object of the labourer's consumption", "corn, shoes, stocking, hats, iron, sugar, and all other commodities"; "corn and the other necessities of the labourer"; "corn and necessities"; "fuel, soap, candled, tea, sugar, salt, etc.,"; "the food and clothing consumed by the

labourer"; "necessaries on which wages are expended",¹⁴ etc. En otras ocasiones contraponen claramente "agriculture" versus "manufactures and trade",¹⁵ o bien "barley and oats" frente a "cotton goods and cloth",¹⁶ "food and necessities essential to the support of men" frente a "arts and commerce".¹⁷

Como hemos dicho antes, la idea de que la taumaturgia del capitalista consistía en crear con el excedente de producción básica, una superestructura productiva supérflua, cada vez más pesada, y, a juicio de Ricardo, efímera a la larga, no era ni mucho menos una novedad. Tal vez por ser una noción familiar, Ricardo no introdujo de forma expresa la distinción entre sistemas básico y no-básico, como un supuesto fundamental de su modelo. El sistema no-básico imprimía a la economía fuerza expansiva, transmitiéndole los impulsos cíclicos que recibía del exterior,¹⁸ en tanto que el núcleo de subsistencia reaccionaba frenando el sistema y haciendo que todo el conjunto se acompasase a su propio ritmo de crecimiento. Teniendo en cuenta esta dualidad es perfectamente aceptable la tesis, tan convincentemente expuesta por W. Sombart,¹⁹ de ser el 'lujo' el elemento generador del capitalismo. Las sorprendentes paradojas observadas en él: "private vices, public benefits";²⁰ la necesidad del gasto dispendioso y del derroche inútil para hacer entrar en acción sus vastos poderes productivos; el efecto empobrecedor del ahorro; y otras tantas teorías heréticas redimidas por Keynes,²¹ encuentran un contexto de interpretación completamente natural en la simple idea de que el pulso del capitalismo está en el sector no-básico y la potenciación de este sector requiere las costumbres dispendiosas y los hábitos destructivos que tan sabiamente ha aprendido a inculcar.

1.6.- La clase obrera²²

En un mundo de autómatas, el sector no-básico podría continuar avanzando indefinidamente, hasta sepultar en chatarra la vida del planeta. La increíble elasticidad-renta de la demanda de estos productos está firmemente arraigada en la extraña capacidad del hombre para convertir cualquier estupidez en una necesidad imperiosa. Por el lado del mercado no debiera haber en principio ningún límite a la expansión de las industrias no-básicas. Pero ocurre que, en tiempos de Ricardo igual que ahora, las máquinas han de moverlas los hombres, las mujeres y los niños; los famélicos escuadrones de des-harrapados, que podían verse poco antes de las cinco de la mañana caminando apresuradamente hacia las fábricas. Es aquí, en la posibilidad de satisfacer las exigencias más elementales de esta pobre gente, donde el capitalismo ha mostrado su incompetencia, y aún más,

su hostilidad a afrontar el problema. La otra cara del industrialismo capitalista hay que verla "en el aspecto demacrado de los niños y de sus padres arrancados del sueño a tan temprana hora bajo cualquier tipo de clima... y en su miserable pitanza, compuesta principalmente de una gacha con agua y pan migado, un poco de sal, en ocasiones rociada con un poco de leche, junto con unas cuantas patatas, y una pizca de 'bacon' o tocino para almorzar".²³

El brillante desarrollo de los sectores no-básicos de la economía -que es en lo que en sus orígenes consistió el capitalismo industrial- tiene la contrapartida dramática de un sector básico y una clase social, dependiente de él, progresando con enormes dificultades.²⁴ El hambre, las enfermedades, el agotamiento físico de los obreros, marcaba un límite infranqueable a los delirios de expansión de los 'traders' ingleses. A este límite se refirieron sobriamente los economistas clásicos con el nombre de 'salario de subsistencia'. Por debajo de él se elevaba la tasa de mortalidad, principalmente la infantil, a cotas de exterminio de la clase obrera. Había que seguir manteniendo un 'delicado equilibrio' entre la voracidad expansiva de los productores de bienes no-básicos y su frágil apoyatura en el trabajo de las mujeres y de los niños. Agudamente señalaba Russell que "por el trabajo de los niños en tales condiciones pudo adquirir Lord Melbourne la fortuna que le permitió ser tan civilizado y tan atractivo".²⁵ Esta doble cara de Lord Melbourne retrata, mejor que cualquier otra descripción, la esencia del capitalismo en esta primera etapa: un sistema no-básico, floreciente y lucrativo, que dió el poder y el ornato a la nueva clase dirigente; y un sistema básico, miserable, para la subsistencia de la clase obrera.

Los acontecimientos de la época están jalonados por una recurrente aparición de la clase obrera -el lado oculto del sistema- en primer plano de la atención política y social. Durante la década de 1790, los ideales de la Revolución Francesa hicieron presa en la clase trabajadora inglesa. Su gran divulgador fue, sin duda, Thomas Paine, cuyo 'Rights of Man' se convirtió por aquellos años en el libro más leído y más perseguido de Inglaterra. Proliferaron las asociaciones reformistas y protectoras, inspiradas en los lemas de la 'Gloriosa Revolución': "Igualdad", "Fraternidad", "Guerra a los castillos, paz a las cabañas". En Sheffield, Durham, North Shields y Leeds, fueron frecuentes las demostraciones de los trabajadores, así como otras de signo contrario que solían terminar quemando en la plaza del mercado la imagen de Tom Paine. La fundación de las primeras "Constitutional Societies", de reformadores republicanos y simpatizantes obreros, fueron replicadas con las "Church and

King's Club", de carácter aristocrático y reaccionario. En 1792, una Proclamación Real prohibió las 'publicaciones sediciosas'. La persecución de panfletos, pero sobre todo de simpatizantes y de trabajadores, fué implacable. Se infiltraron espías en las sociedades populares y se desataron campañas calumniosas contra los que habían sido sus promotores. Pero las incriminaciones contra reformistas como Hardy, Frost, Place, Paine, Tooke, Spence, Thelwall, Evans, y otros, ni pudo evitar el motín de Spithead y Nove en Abril y Mayo de 1799 -con mucho el acontecimiento revolucionario de más impacto en estos años-, ni acabó con las "Corresponding Societies". Los lazos entre las sociedades jacobinas y las trade unions (ilegales en virtud de las Combination Acts de 1799-1800) se hicieron más estrechos. Y hacia 1811, surgió un nuevo radicalismo y una nueva militancia sindical, ésta vez con más profundo sentido de clase. A las "Corresponding Societies" sucedieron los "Hampden Clubs" y las "Political Unions". A los antiguos líderes de la clase media, siguieron otros que eran zapateros, tejedores, impresores, albañiles, o talabarteros. A la persecución sucedió otra persecución aún más dura. A las revueltas de Lancashire, la crisis luddita de 1811-13, la sublevación de Pentridge (1817), y la masacre de Peterloo (1819). La lucha de clases de asomó al borde de la guerra civil. Como dicen los Hammonds, "la Revolución Francesa no había dividido a la gente en Francia tanto como la Revolución Industrial había dividido a los ingleses". Frente a la libertad tal como era entendida en la expresión "English free-born" (el gran argumento constitucional contra el trabajo semiesclavo de las fábricas), se oponía la libertad de negociar y extorsionar los salarios, en un forcejeo mezcla de intimidación y de astucia, donde "no había el menor atisbo de un 'justo' precio, o de un salario justificado por motivos sociales o morales, que se opusiera al juego de las fuerzas del mercado libre". Fué así como, entre 1790 y 1830, lograron producir las fábricas de algodón de Lancashire su producto más duradero y definitivo: la clase obrera.²⁶

CAPITULO II : EL NUCLEO INICIAL DE LA TEORIA RICARDIANA

El sistema social de producción que hemos descrito en el capítulo anterior es un sistema capitalista. Es decir, un sistema de producción cuyo funcionamiento está gobernado por los movimientos del tipo de beneficio. Ahora bien, el tipo de beneficio es un aspecto aislado del problema general de cómo se distribuye el producto entre terratenientes, trabajadores y capitalistas. Son, pues, las leyes de la distribución capitalista las que en última instancia regulan la dinámica del sistema en todas sus manifestaciones. El tema de la distribución -sucintamente expuesto por Ricardo en los tres primeros párrafos del Prefacio a los "Principles..."- se revela así como la parte más fundamental de la Teoría económica.

Si tuviéramos que resumir la teoría de Ricardo, diríamos que la misma consiste en seis supuestos generales de los que se derivan tres teoremas.

2.1.- Las condiciones generales del modelo

En este capítulo resumiremos dichos supuestos y teoremas, como punto de partida para los desarrollos ulteriores. Los supuestos son:

- Un sistema básico de producción simple (todo el capital del sistema básico es circulante); y un sistema no-básico donde se desarrolla el importante fenómeno del maquinismo.
- Un mismo periodo de producción para todas las industrias.
- Un único factor originario de producción: el trabajo.
- Un tipo de beneficio uniforme para toda la economía a largo plazo (competencia perfecta).
- Un nivel de salario natural que detiene el crecimiento malthusiano de la población.
- Rendimientos decrecientes de la tierra.

2.2.- Los teoremas del modelo

El último de los supuestos mencionados permite determinar la parte de producto neto que se paga en forma de rentas. El resto se distribuye entre salarios y beneficios. El tipo de beneficio relevante para el equilibrio a largo plazo es el que se determine den-

tro del sistema básico, mientras que el de las industrias de lujo y exportación tiende a ser superior. Entonces, el problema distributivo puede plantearse preguntándonos cuál es el tipo de beneficio, que cabe asociar, para una tecnología concreta, con un tipo de salario real dado, w , en el interior del sistema básico. Si existe esta supuesta relación entre r y w (relación que hoy se acostumbra a denominar 'curva de salario'), ella constituirá la ley fundamental de la distribución capitalista. Si tal ley no existiera, la distribución podría hacerse de una manera completamente libre. Podría, por ejemplo, elevarse la participación del salario real, sin interferir en el funcionamiento del sistema; esto es, manteniendo fijo el valor de r .

Los precios entonces tendrían que ser tales que, sin dejar de ser positivos, pudieran hacer llegar a los bolsillos de los capitalistas la parte de producción neta que queda después de haber pagado los salarios. Ricardo¹ demuestra que tales arbitrios son imposibles: no puede elevarse la participación de los salarios reales en el producto sin que *ipso facto* descienda el tipo de beneficio. Este es el que M. Blaug² llama el *Teorema Fundamental de la Distribución*, de Ricardo, que podemos enunciar así:

Teorema Fundamental de la Distribución:

Los beneficios dependen exclusivamente de los salarios reales, de modo que si se eleva el tipo de salario real desciende el tipo de beneficio, y viceversa.

Para demostrar hoy este teorema, bastaría comprobar que en todo sistema de producción simple existe, para cualquier técnica capaz de producir un excedente, una curva de salario que es *descendente* en todo su recorrido. Sin disponer de los instrumentos matemáticos actuales, Ricardo no tuvo más remedio que dar un rodeo algo complicado para demostrar dicha relación distributiva.

Supongamos que, partiendo de una situación de equilibrio caracterizada por un tipo dado de beneficio, aumentasen en términos reales los salarios pagados a los trabajadores. Entonces, las industrias que emplean intensivamente mano de obra, tendrían que subir el precio relativo de sus productos, para igualarse competitivamente con el tipo de beneficio de las industrias menos intensivas en trabajo. Pero bajo el nuevo sistema de precios, el agregado a repartir parecería ahora mayor o menor que antes. De forma que, siendo los precios la única magnitud observable del cambio distributivo, no hay modo de saber si en el nuevo equilibrio los salarios reales representan una

parte del producto nacional mayor o menor que antes.

Para hacer comparables los cambios en las proporciones distributivas, es preciso valorar el agregado a repartir de tal forma que no se modifique cuando se alteran los términos del reparto. Observando que el contenido en trabajo de las mercancías es algo que permanece prácticamente constante con cualquier distribución, Ricardo defendía la reducción del producto neto a términos de valor trabajo, como paso previo para poder estudiar significativamente los cambios distributivos.

Utilizando ahora esta unidad de valor invariable³ podría saberse cuál de dos colecciones de mercancías (dos salarios reales distintos, por ejem.) representa una proporción mayor en una colección dada, o producto nacional neto. En definitiva, podemos averiguar qué cambio distributivo es el que está ocurriendo en la economía de mercado, cuando se registran variaciones de precios de una situación de equilibrio a otra. Pero, además, si descubrimos por ejemplo que el nuevo salario real representa una fracción mayor del producto a repartir, podemos entonces estar seguros de que no sólo el beneficio, sino también el tipo de beneficio de equilibrio hacia el que tiende la economía, será menor. La razón de ello está en que, con una técnica fija, la relación capital/producto no puede disminuir a nivel agregado cuando están aumentando los salarios reales. De forma que siendo menor la participación de los beneficios, y no mayor la relación capital/producto, el tipo de beneficio tiende que descender.

Vemos que la prueba del Teorema Fundamental de la Distribución, exigía en el planteamiento de Ricardo la búsqueda de una medida de valor que se mantuviese inalterable ante los cambios de la distribución. Y por aquí comenzó la investigación en sus 'Principios'. Una investigación que, por cierto, nunca le terminó de dejar satisfecho.⁴ Si tuviéramos que completarla, a la luz de los desarrollos posteriores, podríamos enunciar el *Teorema del Valor* en los siguientes términos:

Teorema del Valor:

Un patrón de valor invariable a la distribución, consiste en un sistema de producción ideal cuya curva de salarios es una recta de pendiente negativa. En tal sistema de valor se cumple, por definición, el Teorema Fundamental de la Distribución.

El patrón de valor invariable no es un patrón de valor trabajo, sino como veremos luego, un patrón de crecimiento de von Neumann;⁵

que se corresponde también con el patrón de valor-trabajo *síncronizado* de Samuelson-Weizsacker. Sin embargo, Ricardo se aferraba a sus valores trabajo simples; y tenía buenas razones para ello. Los valores-trabajo son los precios de equilibrio del estado estacionario hacia el que él preveía que se acercaría eventualmente la economía capitalista. Con un tipo de salario real que tiende a bajar cuando aumenta la población; con la población creciendo mientras el salario real está por encima del de subsistencia; con los beneficios disminuyendo debido a la acumulación de capital; y el capital acumulándose mientras el tipo de beneficio es positivo, resulta incuestionable la tendencia del sistema a caer en el estado estacionario.

Este es el tercer teorema del modelo ricardiano, al que podemos llamar *Teorema del Crecimiento*, y enunciarlo así:

Teorema del Crecimiento: *En ausencia de perturbaciones externas, el sistema económico crece aproximándose cada vez más al estado estacionario.*

Aunque en su planteamiento original las proposiciones acerca del valor entran en escena como artificio teórico en el curso de la demostración del teorema básico de la distribución,⁶ han retenido después en la teoría económica un interés sustantivo equiparable, si no superior, al de este último. Bastaba añadirle un poco de metafísica para hacer de la teoría del valor el centro de una nueva filosofía social sobre el reparto del producto. En el pensamiento marxista el patrón de valor ya no es un instrumento auxiliar de medida, sino la norma ética suprema que nos dice cómo debiera distribuirse idealmente el producto.

Por su parte, el teorema del crecimiento no ha perdido en ningún momento su preponderancia en las polémicas acerca del futuro del capitalismo.⁷

Los tres teoremas que acabamos de enunciar constituyen lo que hemos llamado el núcleo ricardiano fundamental. En los capítulos que siguen ensancharemos unas veces y revisaremos otras, los supuestos y los teoremas de este núcleo inicial.

CAPITULO III : LA ECONOMIA NO BASICA

En el primer capítulo hemos descrito la irrupción del industrialismo en Inglaterra como un proceso dirigido a levantar una superestructura no básica de industrias de exportación, apoyándola en la economía tradicional de producción de alimentos y artículos de primera necesidad.

Analizaremos ahora en qué sentido puede afirmarse que el comercio exterior de los tiempos de Ricardo era un aspecto *no básico* de la economía inglesa.

Siguiendo a Sraffa, nos separamos del criterio Bortkiewicz-Dmitriev que identifica en general los bienes básicos con los *bienes salariales*. Tal identificación sólo es válida por completo cuando el salario es de mera subsistencia. En este trabajo básico quiere decir lo que es relevante para determinar las posibilidades de distribución que admite el sistema. En otras palabras, lo que es indispensable *para el teorema fundamental de la distribución*.

El tratamiento matemático de la distinción entre la economía básica y no-básica, permite descubrir las principales propiedades de esta última. Entre ellas, la de ser las industrias no básicas potencialmente más rentables que las otras. *Y de ahí la constante tendencia de la economía capitalista a desviar recursos hacia las actividades no básicas*. En el modelo ricardiano el gasto de los terratenientes en los bienes de lujo, permite transferir al sector no básico el excedente de alimentos necesario para sostener la población laboral de las fábricas, el ejército, la marina, y los cientos de servidores de las demás actividades no básicas.

Revisando el capítulo de Ricardo dedicado a la maquinaria, ponemos de relieve que para este autor *tanto el maquinismo como el desempleo eran esencialmente fenómenos no básicos*. Esta idea es crucial para poder entender el modelo ricardiano: la lucha del hombre con la máquina que le desplaza de su puesto de trabajo, el paro en una palabra, es una peculiaridad del dinamismo de las industrias no básicas vinculadas con los mercados extran-

jeros. A pesar de que la Revolución Industrial llenó de maquinaria el panorama industrial no básico, el problema distributivo -ésto es, los movimientos relativos de w y de r - podían todavía estudiarse con el modelo de capital circulante típico de la producción básica.

3.1. La distinción teórica

Definición: Una mercancía es básica si entra directa o indirectamente en la producción de todas las mercancías.¹

La industria que produce una mercancía básica será llamada también, por extensión, industria básica.

Una mercancía que es necesaria para la producción de todas las mercancías tiene que serlo también para la 'actividad' que consiste en reproducir fuerza de trabajo a partir de una cesta de consumo determinada. Por consiguiente, cuando el salario que se paga es de subsistencia, las mercancías básicas en el sentido definido anteriormente, han de entrar a formar parte de una manera u otra en la cesta de consumo de los trabajadores. Inversamente, un bien salarial será en tales circunstancias un bien básico, puesto que toda la producción requiere trabajo y, a través del trabajo, el bien en cuestión. Podemos resumir este resultado de la siguiente forma:

Si el salario es de subsistencia, las mercancías básicas son las únicas que contribuyen al sostenimiento de la clase obrera, y viceversa.

Tan pronto el salario real se sitúa por encima del precio natural del trabajo, se difumina el contraste entre bienes básicos y bienes salariales. La parte de excedente que va a manos del trabajador no es indispensable para el funcionamiento del sistema. En estas condiciones, el salario real tendría un componente básico y otro no básico. Sin embargo, es preferible considerar todo el salario real como no básico, y dejar que el componente básico haga sentir su influencia por el camino indirecto de impedir que el salario descienda por debajo de cierto nivel. Así evitaremos caer en la engañosa conclusión de que los fenómenos no básicos carecen de importancia para los trabajadores.

3.2. Propiedades del sistema industrial no básico

Si la economía cuenta con un sector no básico su matriz técnica, T , tiene que ser descomponible² y podrá escribirse de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} A & O \\ M & N \end{pmatrix}$$

El elemento t_{ij} de esta matriz indica la cantidad de mercancía j necesaria para producir una unidad de la mercancía i . La matriz cuadrada indescomponible, A , refleja la tecnología de las industrias básicas. Diremos a veces que A es un *componente* de T . La submatriz $[M \ N]$ representa las necesidades de inputs de las industrias no básicas. Dichos inputs pueden ser tanto mercancías básicas (M) como no básicas (N).

De la estructura de la matriz T se deducen importantes propiedades del sistema industrial:

1º *En una situación estacionaria la conexión de las industrias básicas con las no básicas son del tipo de una cadena absorbente de Markov.*

En efecto, un proceso de Markov es una sucesión de estados cuyas probabilidades de ocurrencia dependen enteramente de las ocurrencias anteriores.³ Si estas probabilidades no se modifican en el curso del proceso, hablaremos de una *cadena de Markov*. Asociado a ella existe una *matriz de transición*, T , cuyos elementos t_{ij} indican la probabilidad de pasar el estado j estando en el estado i . Cuando la matriz de transición es descomponible, la cadena se llama *absorbente*.

Sea ahora la ecuación de precios de la economía en una situación estacionaria:

$$\begin{pmatrix} A & O \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde p_1 es el subvector de precios de las mercancías básicas, y p_2 el de las mercancías no básicas.

Hagamos la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que cuando el tipo de beneficio es cero: $Ap_1 = p_1$; o bien, $p_1 = A^{-1}p_1$, la ecuación de precios puede escribirse también:

$$\begin{bmatrix} I & O \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Eligiendo adecuadamente las unidades de las mercancías no básicas podemos hacer que todas las filas de la última matriz técnica sumen la unidad.⁴ De esta forma sus elementos pueden ser interpretados como *probabilidades de transición interindustrial*. El elemento t_{ij} indicará la probabilidad de que, estando en la industria i , tenga que utilizarse la mercancía j ; esto es, indica el grado de *dependencia tecnológica* de la industria i respecto de la industria j . Bajo esta interpretación, la matriz técnica se convierte en la matriz de transición de una cadena absorbente de Markov.

2º: En situación estacionaria los precios de las mercancías no básicas se forman por adición del valor de los componentes básicos directa e indirectamente necesarios para su producción.

En efecto, de [1] :

$$Mp_1 + Np_2 = p_2$$

De dónde:

$$p_2 = [I - N]^{-1} Mp_1$$

En la teoría de las cadenas absorbentes, $[I - N]^{-1}$ es la llamada *matriz fundamental*.⁵ Sus elementos nos dan el número medio de veces que la cadena está en el estado no absorbente j cuando el proceso ha partido del estado no absorbente i . En nuestra interpretación, $[I - N]^{-1}$ mide el grado de compenetración industrial del sector no básico: cada elemento n_{ij} es simplemente la cantidad de la mercancía no básica j requerida directa e indirectamente por la industria no básica i . Y como M nos

da a su vez las mercancías básicas requeridas *directamente* por las industrias no básicas, el producto $[I-N]^{-1}M$ dará el contenido *total* de mercancías básicas que puede encontrarse dentro de cada mercancía no básica. En consecuencia, la última ecuación indica que el precio no básico se forma por adición de solamente los valores de los componentes básicos de la mercancía.

Las dos propiedades anteriores son demostrativas de que en una situación estacionaria la economía no básica no tiene ningún papel en el funcionamiento del sistema, en la formación de los precios de equilibrio, ni en el bienestar de los trabajadores.

Veamos ahora qué influencia ejerce el sector no básico sobre la economía cuando el tipo de beneficio es positivo.

3º: *Las industrias no básicas son potencialmente más rentables y en consecuencia constituyen un polo de atracción de los recursos del sistema.*

En efecto, como ha demostrado Zaghini⁶, el sistema no básico es esviable cuando:

$$\lambda < \nu$$

siendo λ la raíz de Frobenius del componente A, y ν la raíz de Frobenius de la submatriz N. Esto quiere decir que la rentabilidad *máxima* que pueden obtener los capitalistas dentro del sistema básico es menor que la que podrían obtener en las industrias no básicas, *si éstas no dependieran del trabajo*. Pues si todos los procesos no básicos están completamente automatizados, no requerirán alimentos ni mercancías básicas de ningún género. La submatriz M será nula, y entonces la desigualdad de Zaghini nos dice que el sector no básicos es más rentable que el sector básico, potencialmente hablando. Todos los recursos tenderán a desviarse hacia las producciones no básicas.

Esta tendencia es más débil en la medida en que las industrias no básicas van siendo más intensivas en trabajo. La producción de alimentos se convierte entonces en una condición de

subsistencia del propio sistema no básico. A medida que los recursos continúan acumulándose en el sector no básico, la producción de alimentos se hace más escasa y más valiosa. Suben los costes de las industrias no básicas y con ello, a partir de determinado momento, cesa la fuga de recursos hacia el sector no básico.

4º *La producción no básica puede elevar eventualmente el salario real si éste está próximo al nivel de subsistencia.*

En efecto, de la ecuación de precios cuando hay excedente repartible:

$$(1+r) \begin{bmatrix} A & O \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

obtenemos:

$$p_2 = [\rho I - N]^{-1} M p_1 + l_2 \rho w$$

donde: $\rho = (1+r)^{-1}$

Por (iv) del Teorema de Frobenius,⁷ para que exista la matriz inversa $[\rho I - N]^{-1}$ es preciso que $\rho > \nu$. Esta desigualdad impone a la elevación del tipo de beneficio un límite más estricto que el sector básico ($\rho > \lambda$), puesto que, como sabemos, $\nu > \lambda$.

Pero si el sector no básico impone al crecimiento del tipo de beneficio un techo más bajo que la razón patrón, ello implica que en equilibrio de pleno empleo el nivel mínimo al que puede descender el salario real es más alto que de otra manera. Entonces, si el salario real está suficientemente bajo, la formación de un sector no básico dentro de la economía puede contribuir a elevar el salario real.

5º *Conforme el tipo de beneficio de equilibrio se acerca a su límite máximo, aumenta la inestabilidad del sistema no básico.*

En efecto, si r se eleva, el valor de ρ puede eventualmente hacerse igual a ν . En tales condiciones algunos precios no básicos pueden hacerse negativos, como consecuencia del formidable aumento de los costes. Las correspondientes industrias no bási-

cas entran en crisis y tienden a desaparecer.

Las anteriores propiedades muestran que el papel del sector no básico en una economía no estacionaria es ambivalente. Por un lado representa una opción de negocios más rentables que los acostumbrados; con ello estimula la inversión y atrae los recursos. Pero por otro lado el sector no básico impide que se materialice en equilibrio una rentabilidad excesivamente alta; pues ello contribuye a su crisis interna con la consiguiente reversión de recursos sobrantes otra vez hacia el sector básico. Así, pues, el sector no básico imprime a todo el sistema un movimiento de sístole y diástole, que da origen a los ciclos de negocios peculiares del capitalismo, principalmente en su fase postricardiana. Al estudio de estos ciclos dedicaremos el capítulo V.

El punto de vista de Ricardo sobre el papel del sector no básico en la economía fué en un principio algo diferente. El engranaje del sector no básico dentro del sistema sólo se lograba al uniformarse los distintos tipos de beneficio. Sin embargo, las condiciones secundarias generadas por el propio proceso de igualación de los tipos de beneficio, hacía presumir que para cuando se alcanzase un tipo uniforme de beneficio la economía se encontraría hundida en el estado estacionario. Estas condiciones colaterales eran, de una parte, el crecimiento de la población que acompañaba al desarrollo de las industrias no básicas; y de otra parte, la ley distributiva en favor de los terratenientes conforme avanzaba el proceso de crecimiento. Estos efectos serán estudiados en el próximo capítulo.

Solamente en la segunda parte del capítulo Sobre la Maquinaria, Ricardo parece apuntar a un mecanismo cíclico de reacción del sector no básico sobre la economía *a través del desempleo*. El modelo del Capítulo V pretende ser un desarrollo de esta idea de última hora. En la próxima sección pasaremos revista al Capítulo de Ricardo 'Sobre la Maquinaria', donde se percibe esta doble función del sector no básico: atraer recursos debido a su mayor rentabilidad (parte primera del Capítulo); y formar un ejército de parados desplazados por la maquinaria (parte segunda del Capítulo).

3.3. El fenómeno no básico del maquinismo

En tiempos de Ricardo la producción del sector no básico estaba compuesta por dos tipos de mercancías: la maquinaria y los bienes de lujo. Cada una de ellas actúa sobre el empleo y el movimiento circunstancial de los salarios en torno al equilibrio.

Al examinar de estas influencias dedicó Ricardo su capítulo 'Sobre la Maquinaria', cuya aparición en la 3 edición de los 'Principles..' fué, a juicio de Sraffa,⁸ un cambio revolucionario. En él Ricardo se retracta expresamente de su antigua opinión de que la sustitución circunstancial del hombre por la máquina jamás podía perjudicar los intereses de la clase trabajadora.⁹ Consideremos primero este aspecto.

A) Efectos del Maquinismo sobre la producción de alimentos:

La clase trabajadora depende para subsistir del *producto bruto* del sistema básico. Entonces, si el sistema básico fuera el único lugar para invertir, los capitalistas no podrían aumentar sus beneficios, o *producto neto*, sin incrementar al mismo tiempo la producción bruta de alimentos. Este era el argumento que veía Ricardo en su anterior defensa de la maquinaria. El error "partió de suponer que siempre que aumenta el ingreso neto de una sociedad, su ingreso bruto aumentará también".¹⁰ Dicho de otra manera: se había olvidado del sector no básico.

Tal omisión era explicable, pues él estaba habituado a imaginar la economía en términos de equilibrio a largo plazo; y por tanto, en términos del sistema básico. Al advertir que la producción no básica genera mayores beneficios para los capitalistas, y que éstos pierden interés en aumentar el producto del sistema básico por dedicarse a producir maquinaria -el bien no básico por excelencia-, Ricardo anota que este trasvase de recursos tiene que hacer descender el número de trabajadores que la economía en su conjunto puede sostener.

La primera parte del Capítulo 'Sobre la Maquinaria' está consagrada a demostrar este punto: *la producción de maquinaria puede dañar el funcionamiento del sector básico distrayendo los recursos que necesita para expansionarse.*

Ello es particularmente cierto cuando la fiebre del maquinismo se ha propagado con la virulencia de una revolución industrial,

"Espero que lo que he dicho -escribe- no induzca a creer que no debe fomentarse la maquinaria. Para aclarar el principio debo decir que estoy suponiendo que la maquinaria perfeccionada ha sido descubierta *repentinamente* y puesta en uso por doquier; aunque la verdad es que estos descubrimientos se van haciendo gradualmente, y actúan en el sentido de posibilitar el empleo del capital ahorrado y acumulado, más bien que en el sentido de divertir el capital de su empleo actual".

Así, pues, si leemos el famoso capítulo con la idea *in mente* de que *el fenómeno del maquinismo está ocurriendo exclusivamente en el sector no básico*, parece difícil dejar de comprender que la preocupación de Ricardo gira en torno a la desviación de recursos desde el sistema básico al sistema no básico, y en torno a la repercusión que esta fuga de recursos podía ejercer sobre la producción de alimentos y el destino de la clase trabajadora.

B) Efectos del Maquinismo sobre el empleo

El Capítulo tiene luego una segunda parte, incluso tipográficamente separada de la primera, en la que Ricardo descubre una influencia de otro orden del sector no básico sobre el empleo.

En efecto, entre las mercancías no básicas hay algunas, como la maquinaria o los animales de tiro y carga, que una vez en existencia tienen la propiedad de durar y competir con el trabajo; cosa que no les ocurre a las restantes mercancías no básicas -las que podríamos llamar bienes y servicios para el consumo de lujo.

A los trabajadores no les es indiferente la manera como los capitalistas orientan la producción no básica. Si los terratenientes gastan sus ingresos en "sostener un gran número de criados y servidores, a la manera de un antiguo barón, darán empleo a mucho más trabajo que si lo gastan en ricas telas o en costoso mobiliario; en carruajes, en caballos, o en la compra de otras mercancías de lujo".¹²

Todavía es ésto más notorio en la que pasa por ser la mer-

cancia de lujo por antonomasia de nuestra civilización: la guerra. En caso de guerra habrá un consumo de lujo de hombres para soldados y marineros. "Pero a la terminación de la guerra, cuando recupero parte de mis ingresos y lo empleo como antes en comprar vino, muebles, u otras cosas de lujo, la población que antes sostenía, y que la guerra creó, se vuelve redundante, y por sus efectos sobre el resto de la población y su competencia con ella para encontrar empleo, hundirá el valor de los salarios y deteriorará muy sensiblemente la condición de las clases trabajadoras".¹³

En resumen, el sector no básico actúa sobre el mercado de trabajo, unas veces, descargando en él la mano de obra desplazada por la maquinaria y los bienes de lujo duraderos, y otras veces, absorbiendo a los parados para enviarlos a la guerra o dedicarlos a otros servicios no básicos. Este mecanismo se superpone al puramente biológico de los nacimientos y defunciones, el cual depende del salario de subsistencia. Marx se sintió tan impresionado por este argumento -más patente en las fases posteriores de la Revolución Industrial- que terminó por prescindir del primer mecanismo (teoría de la población), quedándose solamente con el segundo (teoría del ejército de reserva).

En la alternancia entre producción de maquinaria y formación de desempleo dentro del sector no básico; y producción de bienes de lujo -entre ellos, la guerra- con absorción del paro y elevación del salario real, tenemos el embrión del modelo cíclico que desarrollaremos en el Capítulo V.

3.4. Conclusión

Algunos autores han querido ver en el capítulo de la Maquinaria el reconocimiento final de un principio de sustitución del hombre por la máquina en respuesta a los cambios distributivos; principio que circula en la literatura con el nombre de *Efecto Ricardo*.¹⁴ Esta interpretación satisface el modo de pensar neoclásico, que en esencia consiste en explicar los cambios distributivos que ocurren en la sociedad sobre la base de una infinita sustituibilidad del hombre por la máquina, y viceversa. Y se piensa que todo ello está en contradicción con los supuestos y teoremas del modelo ricardiano.

El error de esta interpretación está en concebir el sistema productivo (y el sistema social) como un todo homogéneo

Tan pronto se introduce la distinción clave entre el sector básico y el sector no básico, se observa que dicho capítulo encaja a la perfección en el modelo ricardiano. La interpretación que hemos dado aquí es congruente con la impresión que se recibe al leerlo de estar Ricardo *completando*, más bien que revisando sobre nuevas bases, su anterior sistema.

En nuestros días no es posible seguir manteniendo confinado el maquinismo en el sector no básico. La utilización de maquinaria también en los procesos básicos obliga a introducir modelos de producción conjunta. Un intento en esta dirección se encontrará en los tres capítulos finales de este trabajo. Pero cuando se trata de interpretar a un autor hay que situarlo en su tiempo. Y en tiempos de Ricardo el sistema básico era fundamentalmente agrícola y artesanal, de producción de ropas y alimentos, en tanto que el sistema no básico estaba constituido por servicios directos, unas cuantas mercancías de lujo y sobre todo por el comercio:

"Comercio de transporte, comercio con países lejanos, y comercio donde se requiere costosa maquinaria; comercio donde los beneficios están dados en proporción al capital, y no en proporción a la cantidad de trabajo empleado".¹⁵

En esas condiciones, vinculada la maquinaria al comercio no básico, la curva de salario obtenida con un modelo de capital circulante seguía teniendo validez.

CAPITULO IV : EL CAMINO HACIA EL EQUILIBRIO, LA FORMACION DE UN TIPO DE BENEFICIO UNIFORME.

La idea de que la libre competencia de los capitalistas promueve la formación de un tipo de beneficio uniforme en todas las industrias, estaba tan arraigada en los clásicos que en realidad ellos definían la competencia por esa tendencia a la igualación.

Ahora bien, el proceso por el que se llega a un tipo común de beneficio, es distinto en la economía básica y en la no básica.

Dentro de la economía básica, la formación de un tipo de beneficio uniforme es consecuencia de la *interdependencia industrial*. Dicha interdependencia introduce un elemento de solidaridad en la competencia entre empresas, que está ausente por ejemplo en los mercados de trabajo. Las empresas saben que todas 'tienen que vivir', puesto que todas dependen de todas. Y es esta especie de comunismo de los capitalistas, en palabras de Marx, lo que hace plausible la idea de que las empresas prósperas aceptan subidas de precios de sus suministradores en dificultades, antes que sucumbir ellas mismas por falta de materias primas. En virtud de esta solidaridad, las empresas buscan en sucesivos tanteos la mejor situación de beneficio para todas a la vez, que es tanto como decir un tipo de beneficio uniforme.

La convergencia hacia un tipo de beneficio uniforme no sería posible a menos que exista en los procesos de ajuste competitivo alguna referencia fija para todas las empresas. En una economía monetaria dicha referencia es el *tipo de interés*. En ausencia del dinero, la aproximación a una meta común sólo puede tener lugar si los empresarios del sistema básico (agricultores y artesanos principalmente) comparten una misma noción acerca de lo que son *beneficios normales* en su actividad.

La generalización del tipo de beneficio básico al resto de la economía es un proceso bastante más complicado. En realidad toda la dinámica capitalista puede explicarse en términos de este proceso. A lo largo de él, las florecientes industrias no básicas ven esfumarse paulatinamente su mayor rentabilidad, has-

ta quedar equiparadas en cuanto a beneficios con las industrias básicas. La tesis de Ricardo es que cuando ésto llega, la economía habrá alcanzado el estado estacionario.

4.1. El tipo de interés y la uniformidad de los beneficios

La igualación de los distintos tipos de beneficios puede derivarse de la existencia de un mercado de fondos prestables que fija un tipo de interés intermedio entre los tipos de beneficio mínimo y máximo observados en el sistema. Sraffa parece tener *in mente* alguna idea de esta clase cuando afirma que el tipo de beneficio "es susceptible de ser determinado desde fuera del sistema de producción, en especial, por el nivel de los tipos monetarios de interés".¹

Supongamos, para simplificar, dos empresas que compiten fijando precios con la técnica del 'mark-up'. Cada una recarga su coste total medio con el porcentaje que estima adecuado como beneficio de su actividad. Los tipos de recargo son en principio arbitrarios y por consiguiente desiguales. Al tipo de interés intermedio una de las empresas tendrá un beneficio puro y la otra una pérdida pura, por lo que las dos corregirán sus precios para hacer coincidir sus tipos de recargo con el tipo de interés de mercado. Ahora el tipo de beneficio se ha igualado, pero los cambios de precios han alterado la estructura de costes y por tanto la rentabilidad relativa de las diversas técnicas. Al elegir las nuevas técnicas más rentables, los tipos de beneficio vuelven a separarse debido a que los inputs han variado. Otra vez ajustarán los tipos de recargo al de interés del dinero, y a continuación ajustarán las técnicas. Puede demostrarse que este proceso converge hacia un tipo de beneficio uniforme, *que tiene además la propiedad de ser el único que maximiza los beneficios de ambas empresas a la vez.*²

4.2. Beneficios normales y tipo de beneficio uniforme

El tipo monetario de interés puede considerarse como expresión de lo que los empresarios entienden por ganancias normales. Prescindamos del mercado monetario y retengamos solamente la idea del beneficio normal.

Las dos empresas de antes parten de tipos de beneficios desiguales. Una de ellas tendrá beneficios supernormales en tanto que la otra los tendrá anormalmente bajos, e incluso pérdidas. En estas condiciones una de ellas expandirá su producción y la otra la contraerá. Conforme avanza este proceso, la primera necesitará cada vez más la producción de la segunda que utiliza como input. Y para vencer la escasez de esta mercancía particular no tendrá más remedio que aceptar subidas de precio de su proveedora, que de esta manera elevará su rentabilidad. El proceso converge naturalmente hacia el tipo de beneficio normal.

La anterior explicación en términos de escaseces relativas surgidas de la interdependencia industrial, no menciona para nada los rendimientos decrecientes a escala de la industria en expansión. La razón de ello es que, como veremos a continuación, *no tiene sentido hablar de rendimientos a escala como algo distinto del propio proceso de formación de un tipo de beneficio uniforme.*

4.3. Tipo de beneficio uniforme y rendimientos constantes a escala

La existencia de un tipo de beneficio uniforme nos dispensa de tener que introducir en el modelo el supuesto de rendimientos constantes a escala. El abandono de este supuesto es la única novedad que Sraffa encontró digna de mención en la Introducción de su libro.³ Esto no obstante, ni los seguidores ni los adversarios del pensamiento sraffiano parecen haberle concedido mucha importancia a esta simplificación. La mayoría de los expositores posteriores simplemente no creen que el supuesto de los rendimientos constantes a escala haya desaparecido realmente del modelo; y optan por introducirlo de manera expresa. En tanto que otros se limitan a señalar que la cuestión de los rendimientos a escala tiene una filiación ideológica ajena al pensamiento clásico.⁴ Lo cual, sin dejar de ser cierto, no parece un argumento de peso para prescindir del supuesto.

A nuestro juicio el supuesto es redundante porque no es posible considerar las cuestiones sobre rendimientos a escala con independencia del proceso de formación de un tipo uniforme de beneficio. Si una empresa o industria está realizando beneficios supe-

riores al resto de la economía, su hipertrofia en relación con el crecimiento del sistema la colocará en situación -o así puede parecerlo- de rendimientos decrecientes a escala. Por el contrario, las industrias en las que el tipo de beneficio se mantenga por debajo del normal a largo plazo, terminarán elevando sus precios y parecerán que operan bajo rendimientos crecientes a escala. Cuando los tipos de beneficio de las diversas ramas de la economía se han unificado, tendremos la apariencia de rendimientos constantes a escala en todas partes.

La razón de todo ello está en que no podemos comparar directamente incrementos de producto con incrementos en la 'unidades de recursos' aplicados a la producción. No existe, como indicaba Clapham,⁵ un sombrero medio que podamos comparar con una cantidad media de una materia prima media. Forzosamente tenemos que utilizar algún sistema de precios y comparar valores. Pero entonces, como no escapó a la sagacidad del mismo Marshall, *no son los rendimientos, sino el tipo de beneficio, lo que habremos calculado:*

"Medir el gasto y la producción en términos de dinero -escribe Marshall⁶ es un recurso tentador, pero también peligroso, pues una comparación de desembolsos en dinero con rendimientos monetarios es susceptible de convertirse en un cálculo del tipo de beneficio sobre el capital".

Más formalmente, podemos establecer el siguiente resultado:⁷

Teorema 1: *El supuesto de rendimientos constantes a escala no es sino otra manera de afirmar que la economía es viable a un tipo de beneficio uniforme.*

En efecto, sea \mathcal{V} el vector de valores añadidos de las industrias básicas. Por definición:

$$p - Ap = \mathcal{V} \quad (1)$$

El rendimiento a escala de cada industria, ω_j , lo medimos por la relación de su valor añadido con el coste de producción. Esto es:

$$\mathcal{V}_j = \omega_j \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i$$

Si los rendimientos son constantes para todas las industrias:

$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = \omega$. Por tanto:

$$v = \omega A p$$

Y sustituyendo en (1) : $p = (1 + \omega) A p$

Pero esta última ecuación, deducida del supuesto de rendimientos constantes a escala, no hace otra cosa que establecer la viabilidad del sistema a un tipo de beneficio uniforme igual a ω .

Así, pues, los rendimientos constantes a escala son una propiedad del equilibrio de crecimiento y no un presupuesto tecnológico. Es curioso que incluso autores que rechazan la posibilidad de construir funciones de producción que sean independientes de los precios y del tipo de beneficio, acepten sin embargo los rendimientos constantes como un supuesto independiente. Desaparecido el gato de Chechire, su sonrisa ha quedado todavía flotando en el aire.

4.4. La igualación de los tipos de beneficio no básicos con el del sistema básico.

Hasta ahora hemos hablado del proceso de formación de un tipo de beneficio dentro del sistema básico. Las industrias no básicas tienen tipos de beneficio distintos y en general superiores. ¿Cómo se generaliza el tipo de beneficio básico a las industrias no básicas?.

Aunque el sistema capitalista está escindido en dos sectores, es imposible que el sector no básico pueda mantener indefinidamente tipos de beneficio superiores al del sector básico. Como dice Ricardo, "en uno y el mismo país los beneficios han de estar, hablando en términos generales, siempre al mismo nivel; o diferir solamente en la medida en que el empleo del capital puede ser más o menos seguro y agradable".⁸

Ahora bien, la generalización del tipo de beneficio básico al resto de la economía tiene que ser una consecuencia del trasvase de recursos que tiene lugar hacia el sector no básico y de la expansión demográfica que acompaña al desarrollo industrial no básico.

Para estudiar este proceso⁹, supondremos agregada toda la producción no básica en una sola cantidad, K . La variación de K a lo largo del tiempo depende del nivel de r . Si el tipo de interés básico es bajo, la afluencia de recursos hacia el sector no básico es muy abundante; por consiguiente, K aumenta. Si r se eleva, K disminuye debido a la menor absorción de recursos y a la inestabilidad del sector no básico con tipos altos de interés. En síntesis, podemos expresar el movimiento de K a lo largo del tiempo como una función de r :

$$\frac{dK}{dt} = \phi(r) \quad [2]$$

La expansión de las industrias no básicas presupone, pues, que r es bajo y por tanto w elevado. Un salario real elevado es, de acuerdo con Malthus, un acicate para la población, que podemos expresarlo así:

$$\frac{dL}{dt} = F(w - \bar{w}) \quad [3]$$

La evolución de la población en el tiempo es función de la disparidad entre el salario real w y el salario de subsistencia \bar{w} .

Tenemos ahora las dos ecuaciones propulsoras del crecimiento capitalista en su fase de 'despegue'. La baja rentabilidad relativa de la economía básica incita la expansión del sector no básico. El alto salario real dispara la población.

En el momento en que los tipos de beneficio no básicos se igualen con el de equilibrio, cesa la acumulación de recursos en el sector no básico. Por consiguiente, $dK/dt = 0$ será la señal de que se ha llegado a un tipo de beneficio uniforme. Con dicho tipo estará asociado un valor \bar{K} de equilibrio. El problema de la uniformación de los tipos de beneficio está, pues, vinculado con el problema de averiguar si el sistema movido por las ecuaciones [2] y [3] converge hacia una solución de equilibrio.

Para que dichas ecuaciones conduzcan al sistema a una situación de equilibrio es intuitivamente evidente que debe existir una retroalimentación¹⁰ de K sobre r en [2] y de L sobre w en [3]. Más concretamente, como demostramos en el Apéndice, para alcanzar una población de equilibrio es preciso que $dw/dL < 0$;

y para alcanzar una producción no básica de equilibrio, es preciso que $dr/dK < 0$. El significado de estas condiciones es completamente obvio.

Veamos ahora si se dan en la realidad.

El que al crecer la población disminuye el salario real ($dw/dL < 0$) es consecuencia de la Ley de la Población, de Malthus,¹¹ según la cual la población crece más deprisa que los alimentos. En cambio, la segunda condición ($dr/dK < 0$) parece más difícil de justificar, pues sugiere que es la actividad del sistema no básico la que determina el tipo de beneficio de equilibrio, y no al revés. La explicación de esta aparente paradoja por medio de los rendimientos decrecientes de la tierra es una prueba de la perspicacia y buen sentido económico de Ricardo.

4.5. Las rentas y los rendimientos decrecientes de la tierra

La tierra no es un factor activo de producción, sino el lugar donde los hombres producen lo necesario para vivir. Lo que hace de la tierra un factor de producción en el sentido convencional es el hecho de que existe propiedad privada sobre la tierra como un medio de obligar a los demás a pagar por su uso. En general, cuando la teoría económica habla de los factores de producción, no se está refiriendo tanto a los agentes de la producción, *cuan- to a todo aquello que tiene poder para reivindicar una parte de la producción, haya o no participado en el proceso.*¹² Si alguien tuviera el poder de hacer pagar por el aire o por el uso de los mares, la atmósfera y los océanos pasarían a ser factores de producción al mismo nivel que la tierra (y aunque las cosas siguieran produciéndose con el mismo trabajo y sacrificio que antes).

La participación de los terratenientes en el reparto del producto es un ejemplo históricamente importante de cómo puede una clase social entrar en el reparto del producto, sin afectar para nada a las condiciones materiales de producción.

En tiempos de Ricardo, los dueños de las tierras estaban en condiciones de participar ventajosamente en el reparto social. El crecimiento desaforado del sector no básico ejercía un apremio constante sobre los agricultores. Había que producir la mayor can-

tividad posible de alimentos del modo que fuese, para poder sostener la multitud de trabajadores no básicos que llenaban las fábricas y las ciudades. Mientras hubiera tierra capaz de producir grano, había que roturarla. Mientras hubiera forma de arrancarle a la tierra una cantidad adicional de trigo, suficiente para pagar el salario del obrero marginal, había que intensificar su cultivo. A toda costa la agricultura tenía que dejar un excedente disponible para el sector no básico. Y es este proceso de intensificación y desplazamiento progresivo del margen de cultivo, el que coloca a los dueños de las tierras marginales en situación de apropiarse una cantidad cada vez mayor del excedente.

El mecanismo de esta apropiación, y las razones por las que resulta inevitable, están perfectamente explicada en los "Principios."¹³ No vamos a insistir sobre ello. Pero sí destacar que los rendimientos decrecientes de la tierra son una explicación distributiva, no una ley de producción.¹⁴ Significa simplemente que conforme se producen más alimentos, es mayor la parte de ellos que el empresario agrícola se ve forzado a entregar al dueño de la tierra. Pese al desplazamiento del margen de cultivo, la matriz técnica sigue siendo la misma. Si el sistema está en equilibrio los agricultores tendrán la impresión de trabajar con rendimientos constantes en términos de valor. Si sus beneficios decaen es solamente a causa de que las rentas suben abusivamente; pero no porque decaiga el rendimiento de la explotación agrícola en términos de valor.

La situación es comparable al establecimiento de un impuesto que el agricultor no puede repercutir. El efecto será disminuir sus beneficios, pero no el rendimiento del negocio. Lo mismo que una teoría impositiva no es una ley de producción, tampoco lo es la explicación de cómo los terratenientes consiguen exprimir el beneficio de los agricultores.

En realidad, los terratenientes y el Estado no son los únicos que pueden disputar el beneficio al empresario competitivo. Rentistas son también, en parte, los capitalistas que pueden beneficiarse de las imperfecciones de los mercados o de sus barreras de entrada.¹⁵ Incluso los propios empresarios competitivos pueden transitoriamente estar en situación de cobrar un premio o renta de los otros, si en el proceso de uniformación de los tipos de beneficio se llega a una situación de *escasez* de su mercancía par-

titular. La diferencia es que, así como esta última escasez se elimina por el propio proceso de ajuste competitivo, la escasez de que dependen las rentas de los terratenientes o de los monopolistas, tiene desde el punto de vista institucional carácter más permanente.

4.6. Conclusiones del modelo

Las anteriores consideraciones permiten llegar a algunas conclusiones del modelo de dinámica capitalista, esbozado en 4.4., explicativo del proceso de generalización del tipo de beneficio básico:

1º Debido a que el desarrollo del sector no básico provoca una elevación de las rentas agrícolas, que reduce el tipo de beneficio básico, *la expansión de la producción no básica ejerce, si es persistente, una influencia negativa sobre el tipo de beneficio* ($dr/dK < 0$).

2º En consecuencia, la acumulación capitalista en el sector no básico encuentra su fin en el momento en que todo el excedente se lo apropian los rentistas y el tipo de beneficio competitivo descienda a cero.

3º *El proceso de igualación de los tipos de beneficio entre los dos sectores culmina en el estado estacionario.*

4º En el estado estacionario desaparece el empresario competitivo. Mas no por ello significa un retorno a la vieja sociedad feudal compuesta de terratenientes y vasallos. Teniendo en cuenta la ampliación del concepto de *rentistas* que hemos hecho en la sección anterior, el estado estacionario debe interpretarse como *la apoteosis de un capitalismo fundado en la renta monopolista más que en el beneficio competitivo*. Así visto, no cabe duda que el capitalismo no cesa de aproximarse a esta meta vislumbrada por Ricardo.

5º Más discutible es reivindicar la conclusión (más de Smith que de Ricardo) acerca del tipo de salario de subsistencia característico del estado estacionario. Las ecuaciones dinámicas (2) y (3) actúan simultáneamente: la población se dispara con el salario real si y sólo si hay puestos de trabajo creados por la expansión del sector no básico. Pero si dicha expansión se detiene debido a que el tipo de beneficio competitivo se anula, no pode-

mos seguir confiando en que continuará operando en solitario la ley de la población reflejada por la ecuación (3). La completa paralización de la actividad competitiva que tiene lugar cuando todos los tipos de beneficio se han nivelado a cero, por fuerza tiene que afectar al mecanismo de dicha ecuación. Ello obliga a rehabilitar la noción del estado estacionario en términos más acordes con la experiencia posterior del desarrollo capitalista. De ello nos ocuparemos en la sección siguiente.

4.7. El estado estacionario

En el estado estacionario el tipo de beneficio es cero. Discutiremos ahora si en dicho estado ha de ocurrir también que el salario sea de subsistencia.

Para que el salario descienda al nivel de subsistencia antes que el tipo de beneficio descienda a cero, la explosión demográfica ha debido ser formidable durante la etapa de formación del sistema no básico. En otras palabras, la ecuación (3) debe tener sobre el sistema una acción más rápida y más enérgica que la (2). En tal caso llegaríamos a una sociedad estacionaria parecida a la China de que habla A. Smith:

"El trabajador -dice¹⁶ se da por satisfecho cuando, después de cavar la tierra por espacio de un día entero, obtiene un salario que le permite por la noche comprar una pequeña cantidad de arroz. La situación en que viven los artesanos es todavía peor, si ello es posible. En lugar de esperar con indolencia, dentro de sus talleres, a que vayan en su busca los clientes, como hacen en Europa, los artesanos chinos recorren constantemente las calles con sus herramientas a cuestas, ofreciendo sus servicios, igual que si pordioseasen empleo. La pobreza de las clases más bajas del pueblo excede en China a la de las naciones europeas en que más abundan los mendigos. Es voz corriente que en la ciudad de Cantón son muchos centenares, más aún, muchos millares de familias las que carecen de techo en tierra firme y viven de una manera permanente en pequeños botes de pesca que flotan en los ríos y canales. Los alimentos que logran adquirir son tan escasos, que se dedican a recoger ansiosamente los más hediondos desperdicios tirados por la borda de cualquier barco europeo.

Cualquier carroña, por ejemplo, el cadáver de un perro o de un gato, aunque esté ya medio putrefacto y apestoso, es presa tan feliz para ellos como el alimento más sano lo es para los habitantes de otros países".

Completando este cuadro, Smith describe en otro lugar "la gran pompa en que viven los señores aristócratas" en China.

La visión del estado estacionario en la imaginación de los economistas, se resiente todavía de los negros colores de esta soberbia pintura de A. Smith. Mas puede suceder que la explosión demográfica y el hundimiento del salario real, se interrumpan deliberadamente mediante la acción política. La sociedad estacionaria sería entonces parecida a la que describe J.S. Mill en uno de los capítulos más bellos salidos de la pluma de un economista:¹⁷

"Es exclusivamente en los países más atrasados del mundo donde el objetivo de incrementar la producción es todavía un objetivo importante: en los otros más avanzados, lo que es económicamente necesario es una mejor distribución, para lo cual un medio indispensable es un control más estricto de la población".

En este estado estacionario habría "más espacio que nunca para cultivar la mente, y toda forma de progreso moral y social"; "los adelantos industriales producirían el legítimo efecto de reducir el trabajo"; las conquistas arrancadas a las fuerzas naturales por la inteligencia y la energía de los descubridores científicos, podrían llegar a ser patrimonio común de la especie y medio para elevar y engrandecer todo cuanto nos rodea".

"No puedo, por tanto, - concluye Mill - contemplar el estado estacionario del capital y de la riqueza con la aversión no disimulada con que generalmente lo han acogido los economistas de la vieja escuela. Me inclino a creer que significaría en conjunto un considerable progreso respecto de la situación actual. Confieso que no me siento encantado con el ideal de vida mantenido por aquellos que piensan que el estado normal de los seres humanos es la agonía de medrar constantemente; que el perseguir, arrollar, empujar, y pisarle los talones al prójimo - que es en lo que consiste el estilo existente de vida social - sea lo más que pueda desear el género humano, o cosa

distinta de síntomas desagradables de una de las fases del progreso industrial".

Pero frente a la China de Smith y a la sociedad socialista de J.S.Mill, cabe todavía una tercera situación estacionaria en la que la población no ha sido controlada mediante una "juiciosa previsión", sino a consecuencia de un paro masivo.

A este tercer estado estacionario nos conduce la propia lógica del modelo ricardiano. La producción no básica consiste en maquinaria y en bienes de lujo. Cuando la producción de maquinaria está en auge, aumenta el paro y desciende el salario real. Ello eleva el tipo de beneficio básico y, a consecuencia de ello, entra en crisis la industria 'pesada' de producción de maquinaria. Los capitalistas se inclinarán a producir artículos para el consumo de lujo, más intensivos en trabajo. Lentamente, comenzará a absorberse el paro y eventualmente ascenderán los salarios reales y bajará el tipo de beneficio. Cuando este proceso avanza suficientemente, volverá a ser más rentable invertir en maquinaria abandonando las industrias de bienes de lujo. Nuevamente comenzará el ciclo. El sistema continuará funcionando en torno a un centro de equilibrio estacionario que nunca llega a alcanzar. Gracias al paro, el sistema competitivo se libera de la pesadilla de la sociedad estacionaria.

En el próximo capítulo formalizamos este modelo, cuya enseñanza parece conforme con la experiencia. Es el paro, más que la sociedad estacionaria, el verdadero destino del sistema capitalista.

APENDICE MATEMATICO AL CAPITULO IV

Las ecuaciones dinámicas del proceso de igualación del tipo de beneficio en toda la economía, son:

$$\frac{dL}{dt} = F(w - \bar{w}) \quad ; \quad \frac{dK}{dt} = \phi(r)$$

Sean L^* y K^* la población y el stock de capital de equilibrio. Definamos la siguiente función de Liapunov:¹⁸

$$V(L - L^*) = 1/2 (L - L^*)^2$$

Dicha función cumple las propiedades de una distancia.¹⁹ En consecuencia, L^* será un punto globalmente estable si la distancia de L a L^* se va haciendo más pequeña a lo largo del tiempo. Esto es, si:

$$\frac{dV(L - L^*)}{dt} < 0$$

Análogamente, definiendo la distancia:

$$V(K - K^*) = 1/2 (K - K^*)^2$$

exigiremos para la estabilidad global de K^* que:

$$\frac{dV(K - K^*)}{dt} < 0$$

Ahora bien:

$$\frac{dV(L - L^*)}{dt} = (L - L^*) \frac{d(L - L^*)}{dt}$$

Desarrollando por Taylor para el punto $L - L^*$, y despreciando los términos no lineales:

$$\frac{d(L - L^*)}{dt} = F(w - \bar{w}) \approx F(0) + F'(0) \frac{dw}{dL} (L - L^*)$$

Sustituyendo y sabiendo que: $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$:

$$\frac{dV(L - L^*)}{dt} \approx (L - L^*)^2 F'(0) \frac{dw}{dL}$$

$$\text{Luego: } \frac{dV(L - L^*)}{dt} < 0 \quad \text{si y solo si } \frac{dw}{dL} < 0$$

Análogamente, puede comprobarse que:

$$\frac{dV(K - K^*)}{dt} < 0 \quad \text{si y solo si } \frac{dr}{dK} < 0$$

CAPITULO V : UN MODELO DE CRECIMIENTO CICLICO

5.1. Los supuestos

1. *El desempleo es un fenómeno típico del sector no básico. El sector básico está siempre plenamente empleado.*

2. *El sector no básico tiene dos departamentos: uno para la producción de maquinaria y otro para los bienes y servicios de lujo. En consecuencia, la matriz técnica podrá descomponerse de la forma:*

$$T = \begin{pmatrix} A & O & O \\ L_1 & L & O \\ M_1 & M_2 & N \end{pmatrix}$$

De acuerdo con lo que vimos en 3.2., la producción de lujo es potencialmente más rentable que la de productos básicos, y la de maquinaria más rentable que la de lujo.

En efecto, si λ es la raíz de Frobenius de A , μ la raíz de Frobenius de L , y ν la de N , la estructura descomponible de T implica que :

$$\lambda > \mu > \nu$$

Esto quiere decir que a determinados tipos de beneficio, soportables por la economía básica, la producción de lujo se asfixia, y aún más la producción de maquinaria. De aquí que hagamos el siguiente supuesto:

3. *Conforme se eleva el tipo de beneficio, entra en crisis la industria de producción de maquinaria y los capitalistas se desplazan hacia la producción de lujo.*

Tal desplazamiento frena la elevación del tipo de beneficio, debido a que la producción de lujo es más intensiva en trabajo y hará aumentar los salarios reales. Esta propiedad está de acuerdo con lo que demostramos en 3.2.,5? Así,pues,

4. *La producción de lujo eleva el salario real hundido previamente por la producción de maquinaria. (Se acepta el efecto Ricardo en el sentido de que la maquinaria desplaza a los trabajadores*

y genera paro).

Nótese que 3. y 4., más que supuestos autónomos, son propiedades deducidas de 1.. La propiedad 2. impide que el sistema se aleje del estado estacionario, en tanto que 1. impide que se aproxime demasiado. El sistema tendrá una tasa fluctuante de crecimiento, g . Ahora bien, si la amplitud de las oscilaciones cíclicas no es muy grande, los capitalistas terminarán adquiriendo la sensación de vivir en un mundo estable a pesar de los periódicos reveses de fortuna. Es presumible, por tanto, que atemperen su conducta a la idea de unos *beneficios normales* y de unas *inversiones normales*. Tenemos entonces dos supuestos más:

5. Los capitalistas del sector no básico comparten una misma noción acerca de cual debe ser la inversión de equilibrio en cada estado de crecimiento. Consiguientemente adaptan su ritmo de inversión en proporción a la desviación que quieren corregir.

6. Los capitalistas del sector no básico comparten una misma noción acerca de los beneficios normales, obligando con sus desplazamientos desde la maquinaria a los bienes de lujo y viceversa, a que el tipo de beneficio básico se mueva en el sentido adecuado para aproximar los beneficios reales a los normales en el sector.

7. Los terratenientes gastan todos sus ingresos en bienes de lujo.

5.2. El modelo

Sea k el capital per capita de la economía. Si ésta crece a la tasa g , la inversión real per capita será $g.k$.

Sea \bar{g} la tasa de crecimiento de equilibrio. La inversión per capita deseada será $\bar{g}k$.

En virtud del supuesto 5., podemos escribir:

$$\frac{dk}{dt} = \bar{g}k - gk$$

Y adelantando resultados del capítulo siguiente, expresaremos la tasa de crecimiento de equilibrio en función del tipo de beneficio y de la propensión al ahorro de los capitalistas, por medio de la ecuación de Cambridge:

$$\bar{g} = r \cdot s_c$$

En virtud de 1. existe pleno empleo en el sector básico, por lo que podemos sustituir este último valor en la ecuación anterior, obteniendo:

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = s_c r - g \quad [1]$$

Sea ahora $\bar{\pi}$ el beneficio que se estima normal por hombre empleado. En virtud del supuesto 6. :

$$\frac{dr}{dt} = \mu (\bar{\pi} - rk)$$

donde μ es un coeficiente que mide la velocidad de reacción del tipo del sistema básico a los movimientos de los capitalistas no básicos desde la producción de lujo a la de maquinaria, y viceversa.

Puesto que los capitalistas conocen cual debe ser la inversión normal en cada circunstancia, existirá también para ellos un stock de capital normal por hombre empleado, digamos, \bar{k} . Entonces: $\bar{\pi} = r \cdot \bar{k}$. Y sustituyendo en la anterior ecuación, tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = \gamma - \mu k \quad [2]$$

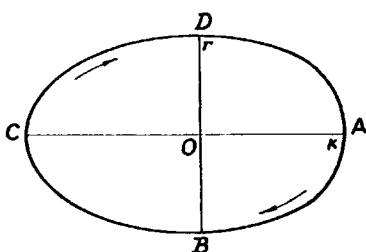
donde $\gamma = \mu \bar{k}$ es un parámetro constante del sistema.

Las ecuaciones [1] y [2] forman un modelo dinámico del tipo Lotka-Volterra,¹ que se estudia en el Apéndice. El movimiento de r y de k determinado por este par de ecuaciones se resuelve en una trayectoria elíptica alrededor del punto de equilibrio (r^*, k^*) definido por:

$$r^* = g/s_c \quad k^* = \gamma/\mu$$

En los dos capítulos siguientes estudiaremos la validez de esta solución de equilibrio, de forma que podemos concentrarnos ahora en el examen de la trayectoria del punto (k, r) en torno al equilibrio.

Gráficamente, dicha trayectoria puede representarse como en la figura.



El punto O tiene por coordenadas los valores de equilibrio (k^*, r^*) .

Consideremos el punto A . Su abscisa indica que la intensidad de capital per capita está más alejada que nunca de su valor de equilibrio; en tanto que no hay desviación de r respecto a su valor de equilibrio.

Los capitalistas disminuirán la producción de maquinaria para corregir la divergencia $k - k^*$. Habrá un cambio en la composición de la producción no básica a favor de los bienes de lujo. En virtud del supuesto 4., se elevará el salario real y disminuirá el tipo de beneficio básico. El resultado combinado de ambos efectos será un movimiento a la izquierda y hacia abajo del punto A . El sistema se desplazará de la posición A a la posición B , siguiendo la trayectoria indicada por la flecha en la figura.

En el punto B la cantidad de capital está ajustada; pero ahora el tipo de beneficio es más bajo que nunca debido a que la expansión de las industrias de lujo ha absorbido el desempleo y elevado los salarios reales. En tales circunstancias los capitalistas restringirán todavía más su inversión, especialmente en las hipertrofiadas industrias de lujo. Comenzará a aparecer desempleo. Los salarios bajarán y se levantará el tipo de beneficio. El punto representativo se desplazará de B a C .

A partir del punto C la inversión se recupera nuevamente; pero esta vez en forma de inversión en maquinaria. El paro sigue creciendo debido a que a la atonía de la producción de lujo se suma ahora la mano de obra desplazada por las máquinas. El salario real sigue disminuyendo y aumentando el tipo de beneficio. El sistema se mueve de C a D .

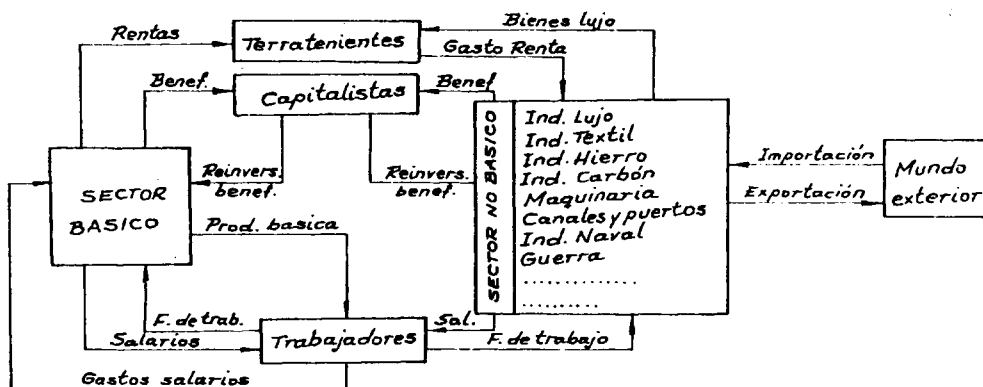
En el punto D el tipo de beneficio está más alto que nunca por encima de su nivel de equilibrio. Sin embargo los capitalistas no notan ningún exceso de capital; por lo que mantienen su ritmo de inversión pero dirigiéndolo esta vez a las industrias de lujo. Se alivia la tensión del desempleo. Comienza a subir el salario y a descender el tipo de beneficio. El sistema se traslada de D a A .

A partir de aquí se repite el mismo ciclo.

5.3. La sincronización con el sector básico

En la explicación anterior se hace implícitamente el supuesto de que el salario real es función del grado de desempleo. Sin embargo, la conexión entre la expansión de las industrias de lujo y la subida de los salarios, no es tan inmediata como parece dar a entender esta hipótesis. Para sacarla a la luz, debemos examinar el mecanismo en virtud del cual los movimientos de k procedentes del sector no básico provocan en el sector básico una respuesta adecuada en el movimiento de r . Es decir, debemos examinar cómo están sincronizadas las actividades básicas y no básicas.

Para ello haremos uso del supuesto 7.: el paso de la corriente de bienes básicos hacia el sector no básico tiene lugar a través del gasto ostentoso de los terratenientes. El esquema de flujo circular entre los dos sectores sería como sigue:



Cuando las industrias de lujo están en auge, crece el empleo y aumenta la presión de los trabajadores no básicos sobre los alimentos del sector básico. Entran en juego los rendimientos decrecientes de la tierra y en consecuencia aumentan las rentas. Una mayor cantidad del excedente básico va a parar al sector no básico.

Pero la elevación de las rentas deprime los beneficios y, a largo plazo, el tipo de beneficio. Suben ahora los salarios y en el sector no básico se registra el desplazamiento hacia la maquinaria. Ello trae consigo el desempleo y una reducción en la tensión ejercida sobre la producción básica, que hace retroceder el margen de cultivo.

Existe, como vemos, en este modelo una perfecta sincronización entre el aumento del empleo y la necesidad de alimentos del sector no básico, por un lado, y la capacidad del sistema para desviar sincronizadamente hacia dicho sector una mayor cantidad de producción básica.

5.4. Generalización del modelo utilizando curvas de salario efectivas

Hasta ahora los rendimientos decrecientes de la tierra han desempeñado un papel decisivo en la sincronización de los movimientos cíclicos del sistema no básico con los altibajos de la producción de alimentos en el sector básico. Tal peculiaridad no es deseable, y debemos aspirar a explicar la dinámica del sistema sin sujeción a esta circunstancia históricamente sobrepasada.

En esta sección mostraremos que aunque no existan rentas de la tierra la sincronización de los dos sectores de la economía depende esencialmente de que existan en el sector básico rentas del tipo que sea, distintas de los salarios y de los beneficios:

Prescindimos de los rendimientos decrecientes de la tierra. Las únicas rentas que subsisten proceden de las diversas formas de *monopolio*.

Sea X_1 la producción agregada básica por unidad de tiempo.

π_1 , los beneficios del sector básico. R_1 , las rentas monopolistas; y $L = L_1 + L_2$, el trabajo empleado tanto en el sector básico (L_1) como en el no básico (L_2).

Por definición:

$$X_1 \equiv \pi_1 + wL_1 + R_1$$

De acuerdo con el supuesto 7.: $R_1 = wL_2$. Y, en definitiva, tenemos:

$$X_1 = \pi_1 + wL$$

Midiendo las anteriores magnitudes en términos de la mercancía patrón: $X_1 = L_1 = 1$ y $\pi_1 = r \cdot \frac{1}{R}$. Luego:

$$1 = r \cdot \frac{1}{R} + wL$$

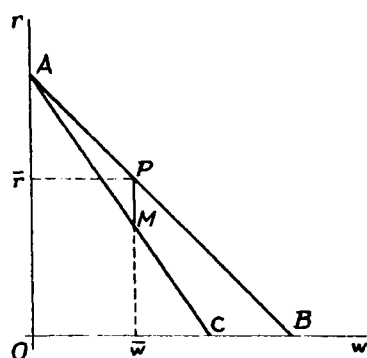
De dónde obtenemos:

$$r = R(1 - wL) \quad [3]$$

Una expresión ligeramente más general que la fórmula de Sraffa para la recta de salario en el sistema patrón, pues tiene en cuenta no solamente el trabajo *empleado* en el sistema básico, sino en general el trabajo *ordenado* o sostenido por el sistema básico. Para el caso en que no existan industrias no básicas, $L_2 = 0$ y [3] se convierte en la ecuación de Sraffa.²

A la luz de la ecuación [3] podemos estudiar ahora el efecto que tiene la aparición del sistema no básico; es decir, el efecto de los flujos y reflujos del empleo sobre el tipo de beneficio básico.

Comencemos por suponer que no existen todavía industrias no básicas. En tal situación la recta de salario es la AB en la fi-



gura. Supongamos que en dicho momento la distribución del producto es la indicada por el punto P.

En el otro extremo, consideremos que las industrias no básicas han proliferado y se han desarrollado hasta el límite de las posibilidades de producción de alimentos por esta economía. En dicha situación L_2 alcanzará su valor máximo; y sea AC la recta de salario definida por [3] para dicho valor

de L_2 .

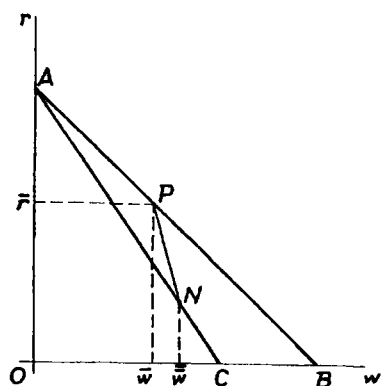
Entre el pleno empleo (recta AC) y la plena desocupación en el sector no básico (recta AB), caben todas las situaciones intermedias. Para cada una de ellas tendremos una posición de la recta de salario entre AB y AC.

Si las fases de empleo y de desempleo siguen en el sector no básico una secuencia cíclica, como consecuencia de los desplazamientos de los capitalistas de la maquinaria a los bienes de lujo, y viceversa, podemos imaginar que la recta AB se desplaza como un péndulo hasta la posición AC, y luego retrocede

a su posición inicial, iniciando un segundo ciclo; y así sucesivamente.

Entonces, suponiendo que *el desempleo no ejerce ninguna influencia sobre el salario real*, la pulsación cíclica del sector no básico obligará al tipo de beneficio a moverse *verticalmente* de P a M, arriba y abajo. Obsérvese que las fases de auge en el empleo (movimiento pendular de B a C) hace descender el tipo de beneficio; y las fases de auge en el desempleo (movimiento pendular de C a B) eleva el tipo de beneficio. En consecuencia, la expansión de las industrias de lujo provoca una disminución del tipo de beneficio, y de esta manera echa las bases para la expansión de las industrias de maquinaria. La expansión de las industrias de maquinaria genera desempleo y en consecuencia eleva el tipo de beneficio, *a pesar de que ahora el salario real no desciende*. Esta elevación del tipo de beneficio obliga a desplazarse hacia las industrias de lujo, con lo que se completa el ciclo del modelo anterior, aunque ahora sin terratenientes y sin vincular los movimientos del salario real a los movimientos del desempleo.

Si las rentas de monopolio siguen las mismas vicisitudes que el tipo de beneficio competitivo - puesto que en definitiva se obtienen como un premio o recargo sobre este tipo básico-, la transferencia de alimentos al sector no básico se sincronizará con las exigencias del trabajo empleado en cada momento.



En el caso de que el salario real reaccione al grado de desempleo (moviéndose por ejemplo de \bar{w} a \tilde{w}), la recta de salario que registra los movimientos efectivos de w y de r , será PN.

La comparación de las curvas de salario efectivas -PM y PN en las dos figuras anteriores- con la curva de salario teórica AB, nos permite descubrir el tipo de efecto que produce el sector no básico en la distribución.

1º Debido a la mayor pendiente de la curva de salario efec-

la participación de los trabajadores en el reparto varía entre límites muy estrechos, a pesar de que la amplitud en los cambios de r pueda llegar a ser considerable.

2°. Debido a que las curvas de salario efectivas son más cortas que las convencionales, *las posibilidades de grandes cambios distributivos serán despreciables en una economía que tenga un sector no básico desarrollado.* En el caso concreto en que el pleno empleo se mantenga, las esperanzas de cambios distributivos de importancia ocasionados por la dinámica del sistema, es prácticamente nula.

3°. *Las variaciones del tipo de beneficio son muy sensibles a pequeños cambios en el salario real.* Por consiguiente, si el desempleo influye en algo sobre el salario real, una política de pleno empleo será una condición necesaria de estabilidad del sistema competitivo. Por otro lado, si el salario real asciende al aumentar el empleo, pero no desciende al aumentar el paro, la economía se precipitará irremisiblemente en el estado estacionario. La curva de salario efectiva tendrá entonces la forma de un zig-zag que hace descender a cero el tipo de beneficio en unos cuantos ciclos de actividad. De aquí que, en cualquier caso, el mantenimiento del pleno empleo y de los términos del reparto, sean dos condiciones de vital importancia para que pueda sobrevivir el sistema capitalista desarrollado.

APENDICE MATEMATICO AL CAPITULO V

Las ecuaciones de Lotka-Volterra describen un equilibrio ecológico dinámico entre dos especies animales: una que se reproduce por sí sola y otra que vive en simbiosis con la primera.³

Supongamos, por ejemplo, una población de u conejos y otra de v zorros.

En ausencia de zorros, los conejos se reproducen en proporción a u :

$$\frac{du}{dt} = \alpha_1 u \quad (\alpha_1 > 0)$$

En ausencia de conejos, los zorros se mueren de hambre, siendo la mortandad proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha_2 v \quad (\alpha_2 > 0)$$

Cuando coexisten las dos especies, la población de conejos sufre una depredación constante igual a $b_1 uv$; lo que permite la supervivencia de animales cazadores en cuantía $b_2 uv$. El equilibrio de ambas poblaciones vendrá, pues, descrito por el par de ecuaciones:

$$\frac{du}{dt} = \alpha_1 u - b_1 uv$$

$$\frac{dv}{dt} = b_2 uv - \alpha_2 v$$

El movimiento cíclico a que dan lugar, puede estudiarse introduciendo las variables de desviación del equilibrio, x e y :

$$x = u - \alpha_2 / b_2$$

$$y = v - \alpha_1 / b_1$$

La trayectoria de estas variables a lo largo del tiempo viene determinada por las ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} = (\alpha_1 - b_1 v) \cdot u = -b_1 y (x + \alpha_2 / b_2) \simeq -\frac{b_1 \alpha_2}{b_2} y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} = -(\alpha_2 - b_2 u) \cdot v = b_2 x (y + \alpha_1 / b_1) \simeq \frac{b_2 \alpha_1}{b_1} x \quad [1]$$

Derivando la primera ecuación otra vez respecto del tiempo, y sustituyendo en la segunda, reducimos el anterior sistema de dos ecuaciones a una sólo ecuación diferencial de segundo grado:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2 x$$

cuya solución (cfr. Gandolfo, *op.cit.*, p.55) puede escribirse en la forma:

$$x = A \cos(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} t - E)$$

donde E es una constante arbitraria para indicar el desfase. Mas como en la presente solución tenemos un movimiento oscilatorio (debido a que la raíz característica es compleja) y de amplitud constante (debido a que el módulo de dicha raíz compleja es la unidad), no perdemos generalidad si hacemos $E=0$; con lo que

$$x = A \cos(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} t)$$

Sustituyendo en [1], e integrando, obtenemos la solución para y :

$$y = B \sen(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} t)$$

A partir de las dos últimas ecuaciones se obtiene la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

cuyo periodo de revolución es igual a $2\pi/\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$.

El modelo de Volterra por fuerza tiene que ejercer un gran poder de sugestión sobre los economistas que buscan explicaciones a una sociedad dividida en clases, en la que *el hombre es un lobo para el hombre*. La polbación humana no es una excepción a este planteamiento biológico.⁴ Pero igualmente la tensión capitalista entre la acumulación y el derroche puede ser de este tipo. Por eso hemos usado este modelo para explicar la reacción del sistema a los desplazamientos capitalistas desde las industrias productoras de bienes de equipo a las industrias productoras de bienes de lujo, y viceversa. Esto es una forma de sacar a la luz la simbiosis económica entre el sistema básico y el no básico; o si se quiere, entre los capitalistas y los trabajadores.

CAPITULO VI : EL TIPO DE BENEFICIO DE EQUILIBRIO

En el modelo anterior, el centro de equilibrio en torno al cual gravita la economía está definido por un tipo de beneficio de equilibrio y por una intensidad de capital *per capita* de equilibrio. Dedicaremos este capítulo a estudiar el tipo de beneficio de equilibrio, tal como es definido por la ecuación de Cambridge; mostrando a continuación que tal tipo de beneficio es *unico*, y no múltiple o *dual*, como se ha venido sosteniendo. Para ello analizaremos la condición económica de la que depende la validez del resultado dual, poniendo de manifiesto que *dicha condición implica que bien los salarios o bien los beneficios se han hecho negativos*. En un segundo resultado, más general, demostramos que la ecuación *dual* es imposible con un tipo de beneficio positivo.

6.1. La ecuación de Cambridge

La visión de la economía que hemos tenido hasta aquí, ha sido la de un compuesto de distintas mercancías, industrias, o sectores económicos. Y para buscar en este complejo mundo el tipo de beneficio de equilibrio, habremos de encontrar alguna actividad -agrícola, por ejemplo- cuyo input y output consistan en una misma mercancía. Es claro que, cualquiera que sean los movimientos de precios, una actividad así tendría invariable su tipo de beneficio. La uniformación competitiva de los tipos de beneficio aparecerá, pues, como una convergencia hacia ese tipo fijo de beneficio.

Pero, aparte de como un complejo industrial, la economía también puede concebirse como un compuesto de clases sociales. Entonces, siguiendo la misma lógica de Ricardo, en vez de buscar el sector productivo que utiliza y produce la misma mercancía, buscaremos *aquella clase social cuyos ingresos y gastos consistan en una misma categoría de renta*.

Supongamos que la distribución se hace solamente entre capitalistas y trabajadores. Cada clase recibe una parte de los beneficios, proporcional a la cantidad de capital que posee. A largo plazo, esta cantidad de capital está determinada a su vez por su respectiva propensión al ahorro. Luego en equilibrio a largo plazo habrá una rela-

ción constante entre los beneficios que ingresa cada clase y lo que ahorra cada una de ellas:

$$\frac{P}{S} = \frac{P_w}{s_w(W+P_w)} = \frac{P_c}{s_c P_c} = \frac{1}{s_c}$$

donde P y S son el beneficio y el ahorro global; P_c y P_w , el beneficio de los capitalistas y el de los trabajadores; s_c y s_w , sus respectivas propensiones al ahorro.

Ahora bien, si todos los ingresos de una de esas clases -la capitalista- consisten en beneficios, sus ahorros consistirán también en beneficios. De esta manera, cualquiera que sea la distribución del producto, la propensión al ahorro de esta clase social constituye un punto fijo de las variaciones del gasto, al que debe adaptarse la relación ingreso-ahorro de las demás clases sociales y de la sociedad en su conjunto:

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{s_c}$$

Teniendo en cuenta que en equilibrio el ahorro debe ser igual a la inversión, tenemos:

$$\frac{P}{K} = \frac{1}{s_c} \cdot \frac{I}{K}$$

o bien:

$$r = \frac{g}{s_c}$$

Esta última es la ecuación de Cambridge,¹ que nos determina la relación entre g y r de equilibrio en función solamente de un parámetro institucional: la propensión al ahorro de los capitalistas.

Este es un resultado de la mayor generalidad. Tanto por su simplicidad -una 'versión gloriosa de la identidad entre ahorro e inversión' (Khan)-, como por sus devastadoras consecuencias para la teoría de la *productividad marginal*, la ecuación de Cambridge se ha convertido en un tema recurrente de atención en la literatura económica de los últimos años.

6.2. La ecuación dual de Meade-Samuelson-Modigliani (M-S-M)

Para los 'creyentes' en la función de producción parece existir un indudable atractivo en traducir a su propio lenguaje los resultados provenientes del ángulo crítico de la teoría. En este sentido,

Meade primero, y Samuelson y Modigliani después,² han mostrado que la ecuación de Kaldor-Pasinetti se cumple *también* con una función de producción neoclásica. Hasta aquí ninguna novedad.

Pero M-S-M han ido más lejos, mostrando que cuando

$$s_w > \alpha s_c$$

siendo α la proporción de los beneficios en el producto, deja de cumplirse en tales condiciones la ecuación de Cambridge, ocupando su lugar una ecuación *dual*, según la cual *la relación producto-capital de equilibrio viene determinada por la tasa natural de crecimiento del sistema y por la propensión al ahorro de los trabajadores:*

$$\frac{f(k)}{k} = \frac{g}{s_w}$$

Teniendo en cuenta que en la sociedad de M-S-M hay una sola clase de ahorradores -los trabajadores-, la ecuación dual es exactamente la misma que la de Harrod-Domar.³ Por otra parte, la ecuación dual puede también escribirse así:

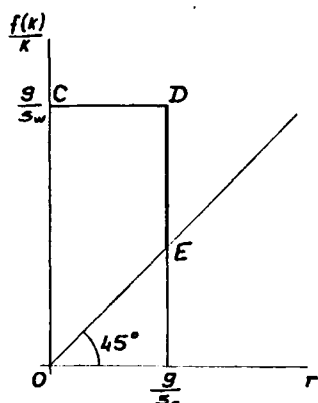
$$r = \alpha g / s_w$$

Y al comparar esta ecuación con la de Cambridge, descubrimos que el equilibrio dual representa siempre un tipo de beneficio inferior.⁴

6.3. Simetría formal de ambos teoremas

Ha sido corriente en la literatura económica presentar la ecuación de Cambridge y la Dual como dos resultados perfectamente simétricos: si $s_w \leq \alpha s_c$, sólo es válida la ecuación de Cambridge; si $s_w > \alpha s_c$, sólo es válida la ecuación dual.

Una conveniente representación gráfica de esta simetría ha sido expuesta por J. Meade.⁵



En abscisa representamos el tipo de beneficio, y en ordenada la relación capital-producto. La línea CD es el lugar de los equilibrios 'duales'; DE el lugar de los equilibrios 'de Cambridge'. El trozo de ordenada por debajo de E es irrelevante, pues en él los beneficios serían mayores que la renta nacional.

Cualquier línea del cuadrante positivo que salga del origen con un ángulo superior a 45° podrá cortar CD (produciendo entonces un resultado dual) o cortar DE (produciendo entonces un resultado Pasinetti). Todo dependerá de la pendiente de la línea;ésto es, de la relación:

$$\frac{f(k)/k}{r} = \frac{Y}{P} = \frac{1}{\alpha} > 1$$

Lo que M-S-M demuestran es que, cuando concretamente $\alpha \geq \frac{s_w}{s_c}$, la línea corta forzosamente la horizontal CD; y cuando $\alpha < \frac{s_w}{s_c}$, corta forzosamente la vertical DE. El que se produzca un tipo de equilibrio u otro depende así de los valores relativos de s_w y s_c , y de la participación de los beneficios en el producto, α .

Aunque los dos resultados sean simétricos desde el punto de vista formal, hay sin embargo una solución que tiene sentido económico y la otra no. No vamos a discutir, como hace Harcourt,⁶ que el trozo de línea CD (en la representación gráfica de Meade) debe ser más corto y la línea DE más larga. La importancia de un problema económico no se puede decidir mediante cambios de escala en las representaciones. Tampoco vamos a tomar en cuenta el hecho, ciertamente importante, de que cuando se introduce en el modelo la actividad impositiva del Estado, el equilibrio de Pasinetti sigue siendo posible, en tanto que el dual, en general, no lo es, como ha mostrado I. Steedman.⁷ Nuestra demostración de la asimetría económica de ambos resultados pretende ir más lejos. En la sección siguiente mostraremos que la condición que implica el teorema dual, implica también que los salarios o los beneficios se han hecho negativos. Y en la sección siguiente demostraremos con más generalidad que la ecuación dual es imposible con un tipo de beneficio positivo.

6.4. Imposibilidad de la ecuación dual con un reparto positivo

Desde el punto de vista económico, la condición patológica: significa, como veremos ahora, que el componente de beneficio en el ingreso total de los trabajadores, es mayor que el componente de beneficio en el ingreso total de la sociedad. La incompatibilidad de este supuesto con la existencia de una sociedad en la que el producto se reparte en salarios y beneficios, se revela en que la mencionada condición implica que alguna de las rentas de clase se hace negativa.

Comenzaremos primero mostrando cómo se expresa la participación de los beneficios de cada clase y de la sociedad en conjunto, en función de las propensiones al ahorro de cada clase y de la sociedad en conjunto.

Lema 1 : La proporción de los beneficios capitalistas en la renta total, viene dada por la expresión:

$$\frac{rK_c}{Y} = \frac{s-s_w}{s_c-s_w}$$

Dem.:

$$s = s_c \frac{rK_c}{Y} + s_w \frac{W}{Y} + s_w \frac{rK_w}{Y} = s_w \frac{rK}{Y} + \frac{s_c rK_c - s_w rK_c}{Y} + s_w \frac{W}{Y}$$

$$s = s_w \left(\alpha + \frac{W}{Y} \right) + (s_c - s_w) \frac{rK_c}{Y} = s_w + (s_c - s_w) \frac{rK_c}{Y} ;$$

$$\frac{rK_c}{Y} = \frac{s-s_w}{s_c-s_w}$$

Lema 2 : La participación de los beneficios de los trabajadores en el ingreso de los trabajadores, viene determinado por la relación de propensiones al ahorro de las dos clases sociales. Esto es:

$$\frac{P_w}{P_w + W} = \frac{s_w}{s_c}$$

Dem.: En equilibrio,

$$\frac{P_w}{s_w(P_w + W)} = \frac{P_c}{s_c P_c}$$

Luego:

$$\frac{P_w}{P_w + W} = \frac{s_w}{s_c}$$

Lema 3 : La parte de producto distribuida en beneficios viene determinada por la relación entre el ahorro medio de la sociedad y el ahorro de los capitalistas:

$$\alpha = \frac{s}{s_c}$$

Dem.: Por el Lema anterior,

$$\frac{P_w}{Y} = \frac{s_w}{s_c} \frac{W}{Y} + \frac{s_w}{s_c} \frac{P_w}{Y}$$

$$\frac{P_w}{Y} \left(1 - \frac{s_w}{s_c}\right) = \frac{s_w}{s_c} (1 - \alpha)$$

Y por el Lema 1 :

$$\alpha = \frac{P_c}{Y} + \frac{P_w}{Y} = \frac{s - s_w}{s_c - s_w} + \frac{s_w(1 - \alpha)}{s_c - s_w} = \frac{s - \alpha s_w}{s_c - s_w}$$

De dónde:

$$\alpha = \frac{s}{s_c}$$

Podemos enunciar ahora el siguiente resultado de imposibilidad de la ecuación dual.

Teorema 1 : Si se da la condición de la que depende el teorema dual, entonces los salarios de los trabajadores o los beneficios de los capitalistas tienen que ser negativos.

Dem. : Si

$$\alpha < \frac{s_w}{s_c}$$

$$\frac{s}{s_c} < \frac{s_w}{s_c}$$

lo que, para $s_c \neq 0$, implica:

$$s < s_w$$

Pero entonces, por el Lema 1,

$$s_c < s_w$$

o de lo contrario los capitalistas recibirían beneficios negativos.

Pero si $s_c < s_w$, por el Lema 2, $P_w > P_w + W$, y serían entonces los trabajadores quienes recibirían un salario negativo.

6.5. Imposibilidad de la ecuación dual con un tipo de beneficio positivo.

En la demostración original de Kaldor-Pasinetti, la ecuación de Cambridge depende del supuesto:

$$s_w < \frac{I}{Y} = \frac{rK}{Y} \cdot \frac{I}{rK} = \alpha \frac{g}{r} = \alpha s_c$$

En cambio, en la demostración de M-S-M, el supuesto relevante es como hemos visto:

$$s_w \leq \alpha s_c$$

El siguiente Lema prueba que ambas condiciones son equivalentes:

Lema 4 : Las condiciones $s_w < \frac{I}{Y}$ y $s_w \leq \alpha s_c$, son equivalentes.

Dem.:

$$s_w < \frac{I}{Y} = \alpha s_c$$

Inveramente, de $\alpha < \frac{s_w}{s_c}$, $\frac{r^{**}K}{Y} < \frac{s_w}{s_c} \cdot$,

$$r^{**} < \frac{s_w Y I}{s_c K I} = \frac{s_w Y g}{s_c I} = s_w \frac{Y}{I} r^*$$

$$s_w > \frac{I}{Y} \frac{r^{**}}{r^*} < \frac{I}{Y}$$

Si s_w se encuentra en el intervalo comprendido entre $\frac{I}{Y} \cdot \frac{r^{**}}{r^*}$ e I/Y , se daría la condición de validez de Kaldor-Pasinetti para la ecuación de Cambridge, con lo que $\alpha = s_w/s_c$, en contra de lo supuesto. Luego siempre que $\alpha < s_w/s_c$, ha de ser $s_w > I/Y$.

Podemos ahora establecer el siguiente resultado:

Teorema 2 : La ecuación dual es imposible con un tipo de beneficio positivo.

Dem.: Para la ecuación dual se cumpla, debe darse por el Lema 4,

$$s_w > \frac{I}{Y}$$

Entonces tendremos:

$$r^{**} = \frac{g}{s_w} \cdot \alpha$$

Hagamos una recurrencia en esta ecuación, substituyendo sucesivamente α por $r^{**} \cdot v^0$, y r^{**} por $\alpha g/s_w$:

$$r^{**} = \frac{g}{s_w} \cdot \alpha = \frac{g}{s_w} r^{**} v = \frac{g^2}{s_w^2} \alpha v = \frac{g^2 v^2}{s_w^2} r^{**} = \dots = \left(\frac{g v}{s_w} \right)^m r^{**} = \dots$$

Luego, o bien

$$r^{**} = 0 \quad ;$$

o bien:

$$\left(\frac{g v}{s_w} \right)^m = 1$$

Pero en este último caso:

$$g v = s_w$$

$$\frac{I}{Y} = s_w$$

en contra de lo supuesto. Luego la ecuación dual sólo puede cumplirse con un tipo de beneficio nulo.

6.6. Otros desarrollos acerca del tipo de beneficio de equilibrio

A título de simple enumeración y sin detenernos en su examen, consignaremos los siguientes:

En una segunda versión de su modelo, Kaldor⁹ ha demostrado un Teorema Neo-Pasinetti aplicable a una economía dominada por grandes empresas. Si dichas empresas practican una política de reparto de beneficios consistente en retener una fracción constante, $1-i$, de su presupuesto de inversión, la ecuación de Cambridge se convierte en :

$$r = \frac{g}{s_e} (1-i)$$

R. Marris¹⁰ ha introducido este enfoque alternativo en su teoría de la empresa 'Corporación', obteniendo el resultado microeconómico:

$$i = \frac{g_i}{s_k}$$

donde i es el tipo de interés que representan los dividendos repartidos a los accionistas; g_i , el tipo de expansión de la empresa; y s_k , la propensión al ahorro de los tenedores de acciones.

Si los trabajadores tienen dos propensiones distintas al ahorro -una que aplican a los salarios y otra que aplican a los beneficios-,

puede suceder que el equilibrio de crecimiento con las dos clases sociales sea imposible, *si con respecto al ahorro de beneficios los trabajadores se comportan exactamente igual que los capitalistas* (Maneshi)¹¹.

La relevancia de la ecuación de Cambridge para el equilibrio de edad dorada, ha sido establecida por K. Sato.¹² Si las propensiones de las dos clases sociales son distintas, *no es indiferente cómo se forma el ahorro medio agregado que requiere la edad dorada*. Pues si el equilibrio es de tipo Pasinetti, la propensión al ahorro de los capitalistas debe ser 1. Y si es de tipo dual, $s_w = \alpha$. (Nótese que, en congruencia con la imposibilidad dual, la condición $s_w = \alpha$ no es distinta, sino la misma, que $s_c = 1$).

P. Balestra y M. Baranzini¹³ han analizado también el equilibrio en el caso de que el tipo de retribución del capital de los asalariados sea más bajo que el tipo de beneficio que ganan los capitalistas. El resultado que obtienen es una expresión para la productividad marginal del capital en la que intervienen todos los parámetros del problema: s_c, s_w, α, γ , donde γ es el tipo de retribución del capital poseído por los trabajadores. Pero este mismo supuesto ha sido reeleborado por Pasinetti en su último trabajo sobre el tema, encontrando de nuevo la ecuación de Cambridge:

$$r = g / \gamma s_c$$

donde γ tiene el significado ya indicado.

Digamos por fin que P. Pattenati¹⁴ ha estudiado la forma de entroncar la ecuación distributiva de Cambridge con un modelo keynesiano, descubriendo que el supuesto que subyace en la teoría no es tanto el de pleno empleo del trabajo, *cuanto el de pleno empleo del capital*.

APENDICE MATEMATICO AL CAPITULO VI

Damos aquí la demostración original de Samuelson-Modigliani sobre el *teorema dual*.

Sea la función de producción:

$$y = f(k)$$

de buen comportamiento:

$$f'(k) > 0$$

$$f''(k) < 0$$

con infinita sustituibilidad de los factores.

En libre competencia, la retribución de los factores según su productividad marginal serán, en equilibrio:

$$r = f'(k)$$

$$w = f(k) - f'(k)k$$

El trabajo, medido si se quiere en unidades de productividad, se supone que crece exponencialmente:

$$L = L_0 e^{gt}$$

Cada clase social posee una parte del capital:

$$K_c + K_w = K$$

Estudiemos el crecimiento de cada stock de capital:

$$\frac{\dot{K}_c}{K_c} = \frac{\dot{K}_c}{K_c} - g \quad \frac{\dot{K}_w}{K_w} = \frac{\dot{K}_w}{K_w} - g$$

Y en situación de equilibrio:

$$\frac{\dot{K}_c}{K_c} = \frac{s_c P_c}{K_c} = s_c f'(k)$$

$$\frac{\dot{K}_w}{K_w} = \frac{s_w (W + P_w)}{K_w} = \frac{s_w (y - rK + rK_w)}{K_w} = \frac{s_w (f(k) - f'(k)(k - K_w))}{K_w}$$

Con lo que en definitiva llegamos al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{K}_c}{K_c} &= s_c f'(k) - g \\ \frac{\dot{K}_w}{K_w} &= s_w \frac{f(k) - K_c f'(k)}{K_w} - g \end{aligned} \quad [1]$$

¿Qué stock de capital crecerá más deprisa?

Un sencillo cálculo¹⁵ en el anterior sistema de ecuaciones permite establecer que:

$$\frac{\dot{k}_c}{k_c} - \frac{\dot{k}_w}{k_w} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \text{si} \quad \frac{k_c}{k_w} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \frac{\alpha(k)s_c - s_w}{[1 - \alpha(k)]s_w} \quad [2]$$

Sean k^*, k_c^*, k_w^* las soluciones de equilibrio de (1) :

$$s_c f'(k^*) - g = 0 \Rightarrow f'(k^*) = g/s_c$$

$$s_w \frac{f(k^*) - k_c^* f'(k^*)}{k_w^*} - g = 0 \Rightarrow k_w^* = s_w \frac{A(k^*) - f'(k^*)}{g - s_w f'(k^*)} \cdot k^*$$

$$k_c^* = k^* - k_w^* \Leftrightarrow k_c^* = \frac{g - s_w A(k^*)}{g - s_w f'(k^*)} \cdot k^*$$

El primer resultado es la *ecuación de Cambridge*. Las otras dos definen su campo de validez.

Si k_c^*, k_w^* tienen valores positivos y finitos, y si la productividad media del capital es más alta que su productividad marginal $A(k^*) > f'(k^*)$, de la última ecuación obtenemos la restricción familiar:

$$s_w \leq \alpha(k^*)s_c$$

Supongamos que dicha restricción no se cumple; o sea,

$$s_w > \alpha(k^*)s_c$$

Entonces por [2] que

$$\frac{\dot{k}_w}{k_w} > \frac{\dot{k}_c}{k_c}$$

El stock de capital de los trabajadores crece más rápidamente que el de los capitalistas. Eventualmente este último se aproximará a cero, quedando inerte el capital poseído por los capitalistas. El único capital que crece sería el de los trabajadores y el capital total. El constante crecimiento de k hará que en algún momento $k > k^*$ y $r < r^*$, siendo r^* el tipo de beneficio determinado por la ecuación Kaldor-Pasinetti, y k^* el capital per capita asociado con dicho tipo de beneficio.

Llamemos k^{**} al nuevo valor al que tiende ahora k . Por la segunda ecuación de (1) :

$$s_w f(k^{**}) - g k_w^{**} = s_w f(k^{**}) - g k^{**} = 0$$

$$g f(k^{**}) \left(\frac{s_w}{g} - \frac{k^{**}}{f(k^{**})} \right) = 0$$

61

De dónde:

$$\frac{f(k^{**})}{k^{**}} = \frac{g}{s_w}$$

que es el llamado *Teorema Dual*.¹⁰

CAPITULO VII : EL CAPITAL DE EQUILIBRIO

En el modelo del Cap. V vimos que el centro de equilibrio del sistema estaba definido no solamente por un tipo de beneficio dado, sino también por una cantidad dada de capital. Si no hubiera en el sistema una cantidad de capital de equilibrio, sería muy difícil poder mantener el supuesto acerca de una *inversión normal*.

Aunque los procesos de acumulación tienen lugar en el sector no básico, el capital de equilibrio es una magnitud determinada por la tecnología del sistema básico. En este Capítulo mostraremos que el capital *per capita* de equilibrio viene definido por la inversa de la razón patrón.

Por lo demás, el capital per capita es una variable *pasiva* en los procesos de distribución y crecimiento; en el sentido de no poder definirse *antes* de haberse fijado la posición crecimiento-distribución del sistema. Una vez dado el punto P, de coordenadas (c,g), sobre la curva de consumo, y el punto D, de coordenadas (w,r), sobre la curva de salario, el capital *per capita* queda implícitamente definido. Los efectos sobre el capital *per capita* de cambios en g o en r, dependerán de la forma de la curva consumo-salario.

El intento de convertir el capital *per capita* en una variable activa de los procesos de distribución-crecimiento, conduce a proposiciones tautológicas.

7.1. La medición del capital per capita

Sea K el capital *per capita* agregado. La renta se paga como salarios y beneficios, y se gasta como consumo e inversión. De forma que para cualquier situación de crecimiento-distribución, tendremos:

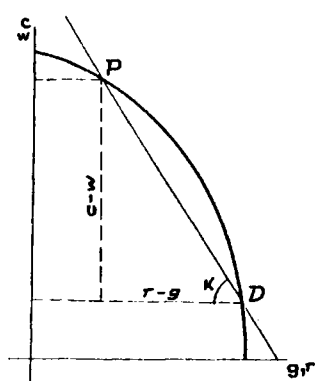
$$c + gk = w + rk$$

De dónde:

$$K = \frac{c - w}{r - g} = \frac{\text{Tasa de explotación}}{\text{Tasa de preferencia intertemporal}}$$

Aquí tenemos la teoría marxista y la teoría austriaca¹ en el numerador y el denominador de una misma expresión definidora del capital.

La representación gráfica de la magnitud que acabamos de definir es bien sencilla.²



Sean las curvas de salario y de consumo representadas en la figura. Por el Teorema de la Dualidad, de Bruno, ambas curvas son matemáticamente idénticas. La posición de crecimiento viene indicada por el punto $P (c, g)$; y la posición de distribución, por el punto $D (w, r)$. Puede comprobarse sin dificultad que la cantidad de capital *per capita* asociada con dichas posiciones, viene dada por la pendiente de la recta que une los puntos P y D .

Manteniendo fijo el punto P en la figura, y desplazando D a derecha o izquierda, a lo largo de la curva, el capital *per capita* aumenta o disminuye, según el caso. Esta variación del capital *per capita* debida exclusivamente a cambios en la distribución se llama *efecto precio*.

Análogamente, manteniendo fija la distribución, y desplazando ahora el punto P a lo largo de la curva, haremos que varíe también el capital *per capita*, debido a lo que ahora llamaremos *efecto composición*.

Cuando la curva es convexa, el efecto precio se dice que es de *buen comportamiento*. Una disminución (aumento) de r produce un aumento (disminución) de k ; de manera que los beneficios por hombre empleado ($r.k$) tienden a ser relativamente estables. Con una curva cóncava, la relación entre k y r se dice que es *perversa*³, pues las dos variables se elevan y descienden al mismo tiempo, de manera que los desequilibrios distributivos no podrían corregirse mediante sustitución de factores.

7.2. El capital *per capita* de equilibrio

Para descubrir la cantidad de capital de equilibrio encerrada en cada técnica, eliminaremos los efectos aprienciales derivados de los movimientos de los precios. Para ello usaremos la medida invariable de valor de que hablaremos en el Capítulo siguiente. Cuando se está utilizando tal unidad de medida, puede demostrarse que:

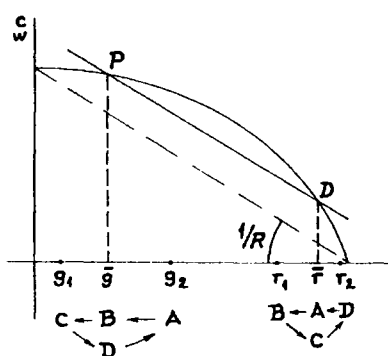
$$w = \frac{1}{1+e} \quad r = \frac{e}{1+e} \cdot R \quad c = 1 - gk$$

donde e es la tasa de explotación, tal como la definiremos luego.⁴

Teniendo en cuenta dichos resultados, podemos escribir el capital *per capita* de la siguiente forma:

$$k = \frac{\frac{c}{r} - \frac{w}{r}}{1 - s_c} = \frac{\frac{1 - gk + e - egk - 1}{eR}}{1 - s_c} = \frac{(e - gk(1+e))/eR}{1 - s_c} = \frac{\frac{1}{R} - \frac{gk}{r}}{1 - s_c} = \frac{\frac{1}{R} - s_c k}{1 - s_c} = \frac{1}{R}$$

Vemos, pues, que el capital *per capita*, medido en unidades invariables de valor, es una cantidad tecnológicamente determinada.



Supongamos que s_c se mantiene constante a lo largo del ciclo económico. La separación entre r y g en la figura se mantiene constante, conforme r vibra en el intervalo $r_1 - r_2$. La pendiente de la recta PD, y por consiguiente el capital *per capita*, irá cambiando a lo largo del ciclo, acercándose y alejándose del valor de equilibrio, según la fase del ciclo.

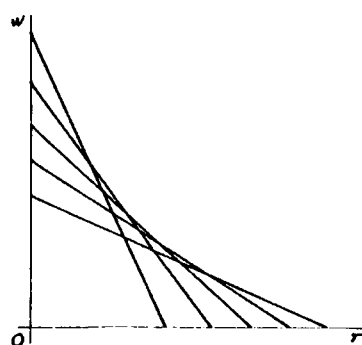
Es patente en la figura que si la curva de salario es toda ella cóncava o convexa (lo que ocurre, por ejemplo, cuando hay solamente dos mercancías básicas), la condición suficiente para que se dé el capital *per capita* de equilibrio en alguna fase del ciclo es que los valores de r y g estén suficientemente alejados.⁵ Pues de otro modo, podría ocurrir que los movimientos relativos de r y g sólo produjeran valores de k sistemáticamente superiores, o sistemáticamente inferiores, al valor de equilibrio. Como r y g están más distanciados cuanto menor es la propensión al ahorro de los capitalistas, podemos concluir que con un sistema básico poco desarrollado, la idea de una inversión normal y de una intensidad de capital normal, implica un alto consumo de la clase capitalista.⁶

Conforme el sistema básico se hace más complejo, aumenta probablemente el número de puntos de inflexión que aparezcan en la curva

de salario.⁷ Esta última desciende ahora formando una 'trenza' alrededor de la recta patrón, cuya pendiente indica la cantidad de capital de equilibrio. En estas condiciones, bastarán pequeñas variaciones de r o de g para hacer que k tome en determinados momentos su valor de equilibrio. Por consiguiente, en economías suficientemente desarrolladas el equilibrio del modelo es compatible con altas propensiones al ahorro de los capitalistas; y por ello, con situaciones próximas a los estados de edad dorada.

7.3. La productividad marginal del capital

Con cada recta de salario hay asociada una cantidad de capital *per capita*, que viene medida en unidades *standard* por la recíproca de la razón patrón. Veamos ahora la posibilidad de asociar técnicas distintas - y por consiguiente, distintas cantidades de capital *per capita* - con cada valor del tipo de beneficio.



Para ello consideremos la familia de rectas de salario, de ecuación general:

$$w = q - r.k$$

donde q es la cantidad variable de producto *per capita*, y k la cantidad variable de capital *per capita*. Cada valor de estos parámetros define una de las rectas de salario de la familia.

Las condiciones matemáticas para que exista una envolvente del haz de rectas, son:

- a) Que entre los dos parámetros, q y k , que definen la familia de rectas, exista una ligadura:

$$q = f(k) \quad [1]$$

A esta ligadura le llamaremos la *función de producción subrogada*.⁸

- b) Que cada punto de la frontera sea un punto *switching*, de forma que la variación del salario a una pequeña variación del capital *per capita*, sea nula:

$$dw/dk = 0 ; \quad (r = f'(k)) \quad [2]$$

c) Que a cada valor de r le corresponda un valor de k :

$$k = \varphi(r) \quad [3]$$

Demostraremos ahora el siguiente resultado:

Teorema: La determinación del tipo de beneficio igualándolo a la productividad marginal del capital, calculada a partir de la función subrogada de producción, es tautológica.⁹

Dem.: De $[2]$ y $[3]$:

$$r = f'[\varphi(r)]$$

Lo que nos dice que cada valor de r es transformado por la función φ , y el resultado por la función f' , de forma que se obtiene como imagen el propio valor r de partida. Como indican las ecuaciones $[2]$ y $[3]$, $f'(\cdot)$ y $\varphi(\cdot)$ son una la inversa de la otra. Luego:

$$r = f'[f'^{-1}(r)] = r$$

Si, además, se suponen constantes las participaciones de los factores, la función subrogada de producción es la Cobb-Douglas.

En efecto, si

$$rK = \bar{\alpha}$$

la función $[2]$ adopta la forma:

$$r = \frac{\bar{\alpha}}{k}$$

y la $[1]$:

$$q = \int \frac{\bar{\alpha}}{k} dk$$

De dónde obtenemos: $q = A \cdot k^{\bar{\alpha}}$

siendo A una constante arbitraria de integración.

En este caso particular, la elasticidad de sustitución¹⁰ es igual a uno:

$$\sigma = \frac{\frac{d(k/L)}{k/L}}{\frac{d(r/w)}{r/w}} = 1$$

Y esto nos permite construir en el plano K-L una isocuanta que

sea una réplica exacta de la frontera convexa de salario del plano $w-r$. Por tanto, en la subrogación de la función Cobb-Douglas hay una mera transposición de retribuciones por cantidades de factores, tratando la curva o frontera de salario como si fuese una isocuanta. Naturalmente, esta transposición sólo es posible si la técnica empleada da como resultado una curva de salario con las mismas características que la isocuanta usual.

CAPITULO VIII : LA MERCANCIA PATRON Y EL CRECIMIENTO EQUILIBRADO

Los valores trabajo, al igual que los precios, cambian con la distribución. Así lo reconoció Ricardo en multitud de pasajes, y en especial en las Secciones IV y V del primer capítulo de sus 'Principles..'

"La dificultad o facilidad de producción -escribe en su último borrador¹ no es de forma absoluta la única causa de variación del valor; hay otra, la subida o descenso de los salarios, que aunque comparativamente de poca monta y de menos frecuente ocurrencia, afecta sin embargo al valor de las mercancías y no debe ser omitida en esta importante investigación".

Los cambios en los valores trabajo, debidos a cambios en la distribución, serán pequeños si el sistema básico es relativamente simple e intensivo en trabajo. De aquí que Ricardo buscase como unidades de medida ejemplos de mercancías que podían producirse con una cantidad mínima de inputs materiales.

Como ha mostrado Sraffa², existe una mercancía compuesta cuyo contenido en trabajo permanece invariable ante los cambios de distribución. Aunque el citado autor utiliza esta *mercancía patrón* como un instrumento auxiliar de medida, puede demostrarse que su composición corresponde a la que tendría el producto neto de una economía que marchase por la senda de von Neumann³. Por tanto, indica la composición del producto que debería alcanzar cuanto antes una economía empeñada en un programa de acumulación a largo plazo.

En este Capítulo examinaremos las propiedades matemáticas de la mercancía patrón, y las aplicaremos luego al estudio de la *distribución de equilibrio* de la economía. A continuación veremos la relación entre el sistema patrón y la economía de von Neumann. Finalmente revisaremos la teoría de la explotación, utilizando la medida de valor invariable en lugar de los valores trabajo simples.

8.1. La mercancía patrón

Definimos la mercancía patrón como una mercancía compuesta cuyo contenido en trabajo es siempre constante.

Teorema 1 : *La mercancía patrón tiene la composición indicada por el autovector asociado con la raíz de Frobenius de la matriz técnica.*

Dem.: Sea A la matriz indescomponible del sistema básico; λ su raíz de Frobenius y q el autovector asociado con dicha raíz. Por definición de autovector (ó vector característico):

$$Aq = \lambda q$$

Designemos ahora por ω el vector columna de los valores trabajo de las mercancías básicas (el elemento ω_i es el trabajo total contenido en una unidad de la mercancía i). Podemos escribir ω como suma del trabajo directo y del trabajo indirecto contenido en cada unidad de mercancía:

$$\omega = \alpha_0 + \omega A = \alpha_0 [I - A]^{-1}$$

donde α_0 el vector de trabajo directo empleado en el sistema.

Calculemos ahora el valor trabajo de la mezcla de mercancías dada por el vector q :

$$\omega q = \alpha_0 [I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots] q = \alpha_0 [q + \lambda q + \lambda^2 q + \dots]$$

De dónde:

$$\omega q = \frac{1}{1-\lambda} \alpha_0 q$$

Vemos que el valor total contenido en q es un múltiplo del trabajo directo empleado en su producción, donde el multiplicador es una constante tecnológica. Si la técnica es muy productiva, el valor de λ estará más próximo a 1 que a 0; el multiplicador, $1/(1-\lambda)$, será pequeño y por tanto también será pequeña la cantidad de trabajo almacenada en q . Con una técnica menos productiva, el multiplicador del valor será grande, y en consecuencia la producción de q requerirá una mayor cantidad de trabajo. Pero, en cualquier caso, una vez fijada la técnica, el contenido en trabajo de q es inmutable, puesto que tanto $1/(1-\lambda)$, como $\alpha_0 q$, están dados tecnológicamente. Luego la mercancía patrón tiene que tener la misma composición que q .

El vector q nos da la mezcla deseada de mercancías, pero no la magnitud absoluta de la mezcla. A fin de normalizar dicho vector, lo multiplicaremos por un escalar θ , tal que el nuevo vector normalizado:

$$\bar{q} = \theta q$$

absorba todo el trabajo directo empleado por el sistema:

$$\omega \bar{q} = a_0 q$$

De dónde:

$$\theta = \frac{a_0 q}{\omega q} = 1 - \lambda$$

En suma, si λ es la raíz de Frobenius de la matriz técnica, y q su vector característico asociado, la mercancía patrón, \bar{q} , viene definida así:

$$\bar{q} = (1 - \lambda) q$$

Ejemplo: Consideremos el sistema productivo que utiliza Sraffa en p. 39 de su libro. Es fácil comprobar que, para dicha matriz técnica, $\lambda = 15/16$ y $q = (4/3, 4/5, 1)$. Normalizando este último vector, obtenemos la mercancía patrón:

$$\bar{q} = (2/9; 2/15; 1/6)$$

El trabajo directo contenido en \bar{q} es :

$$a_0 \bar{q} = 3/16 \cdot 2/9 + 5/16 \cdot 2/15 + 8/16 \cdot 1/6 = 1/6$$

Y el trabajo total:

$$\omega \bar{q} = \frac{1}{1 - \lambda} a_0 \bar{q} = \frac{1}{1/6} \cdot 1/6 = 1$$

8.2. La mercancía patrón y la distribución de equilibrio

Expresando ahora las magnitudes económicas en términos de la mercancía patrón, obtenemos lo siguiente:

1º La raíz de Frobenius de la matriz técnica indica la cantidad de trabajo indirectamente incorporada a la mercancía patrón.

En efecto:

$$\omega \bar{q} = 1 = \frac{1}{1 - \lambda} \cdot a_0 \bar{q}$$

De dónde:

$$1 - \lambda = a_0 \bar{q} = \text{trabajo indirecto contenido en } \bar{q}.$$

2º La razón patrón mide la relación entre las cantidades de trabajo directo e indirecto contenidas en .

En efecto:

$$R = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\text{trab. directo de } \bar{q}}{\text{trab. indirecto de } \bar{q}}$$

Este resultado fué ya señalado por Meek :

"La R de Sraffa -escribe-⁵, aunque generalmente se expresa como la razón entre el valor del producto neto de la industria 'standar' y el valor de sus medios de producción, es de hecho igual a la razón entre el trabajo incorporado al producto neto de la industria 'standard' y el trabajo incorporado a sus medios de producción".

3º El capital per capita del sistema viene medido por la inversa de la razón patrón.

En efecto, de la ecuación de cantidades:

$$(1+R)qA = q$$

Y la definición:

$$q(I-A)p \equiv 1$$

obtenemos:

$$qAp = 1/R$$

4º Como consecuencia de lo anterior, el salario real en unidades "standard" viene definido por:

$$w = 1 - r.1/R$$

que es la ecuación de Sraffa para la curva de salario en términos de la mercancía patrón.

5º Reducción a trabajos fechados del producto neto:

$$1 = (1-\lambda)w + (1-\lambda)w(1+r)\lambda + (1-\lambda)w(1+r)^2\lambda^2 + \dots$$

ya que la suma de los términos de esta última serie geométrica es:

$$\frac{(1-\lambda)w}{1-(1+r)\lambda} = 1$$

en virtud de la ecuación fundamental indicada en 4°.

8.3. El crecimiento equilibrado de von Neumann

El cálculo de la mercancía patrón es el problema *dual* del que resuelve el crecimiento de von Neumann.

En efecto, en un sistema de producción simple el modelo de von Neumann puede escribirse mediante las siguientes desigualdades:

$$(1+g)Aq \leq q \quad [1]$$

$$(1+r)pA \geq p \quad [2]$$

Una estricta desigualdad en [1] implica el correspondiente $p_j = 0$; y una estricta desigualdad en [2] implica el correspondiente $q_i = 0$.

Teorema 2^o: Los vectores q y p que sirven de solución al modelo de von Neumann, coinciden con las estrategias óptimas de un juego rectangular de matriz de pagos $[I - (1+r)A]$ y valor nulo. El r que anula el valor del juego es precisamente la solución de equilibrio $r = g$.

Para que se anule el valor de la matriz de pagos $[I - (1+r)A]$ es necesario que:

$$|I - (1+r)A| = 0$$

Lo que sabemos ocurre para el valor $(1+r)^{-1} = \lambda$.

Por otra parte, si \bar{q} es la estrategia óptima del juego de valor nulo dado por la matriz de pagos $[I - (1+r)A]$, tenemos para cualquier estrategia p del otro jugador:

$$\bar{q}[I - (1+r)A]p \leq 0$$

De dónde:

$$(1+r)\bar{q}A = \bar{q}$$

Lo que muestra que la estrategia óptima \bar{q} viene dada, al igual que la mercancía patrón, por el autovector asociado con la raíz de Frobenius de la matriz técnica.

Sea \bar{p} la estrategia óptima del segundo jugador. El vector \bar{p} son los precios de von Neumann que sostienen el crecimiento equilibrado. El teorema anterior muestra que \bar{q} (la *mercancía patrón*) y \bar{p} (los *precios de von Neumann*) son dos aspectos duales del mismo problema de crecimiento equilibrado. La economía puede hacerse que crezca equilibradamente prescribiendo para su producción las proporciones de la mercancía patrón, o bien valorando las mercancías a los precios de von Neumann.

La dualidad anterior pone de relieve que la *mercancía patrón* es algo más que una unidad auxiliar de medida. Debido a un teorema llamado de la *estabilidad relativa* de la solución de crecimiento equilibrado,⁷ una economía que crece sostenidamente tiene tendencia a darle al producto neto la composición de la mercancía patrón.

Digamos finalmente que los *precios de von Neumann* reflejan el *valor trabajo sincronizado*⁸ de las mercancías.

En efecto, la sincronización de los diversos estadios de producción de una economía que crece sostenidamente a la tasa g , requiere que en cada etapa no solamente se repongan los medios de producción consumidos, sino que se incrementen en el factor $(1+g)$. Como consecuencia de esta mayor absorción de recursos, aumentará lo que se entiende por trabajo socialmente necesario para la producción.⁹

Sea $\bar{\omega}$ el vector de valores trabajo *sincronizados*. Podemos obtenerlo como suma del trabajo directo e indirecto incorporado a las mercancías:

$$\bar{\omega} = \alpha_0 + \bar{\omega} A (1+g) = [I - (1+g)A]^{-1} \alpha_0$$

Por otra parte, el vector de precios en términos del salario viene dado por:

$$\bar{p} = [I - (1+r)A]^{-1} \alpha_0$$

Si éstos últimos son los *precios de von Neumann*, $r = g$. Pero entonces las dos últimas ecuaciones son iguales y

$$\bar{\omega} = \bar{p}$$

Los precios de von Neumann se identifica con los valores trabajo *sincronizados*.

8.4. El crecimiento equilibrado con ahorro de las dos clases sociales

Uno de los supuestos de von Neumann es que los trabajadores no ahorran y los capitalistas no consumen. Si levantamos esta restricción, y suponemos que el ahorro agregado procede tanto de los beneficios como de los salarios, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3 : *El crecimiento equilibrado con las dos clases sociales exige que el consumo de los capitalistas sea exactamente financiado por el ahorro de los trabajadores.*

Dem.: En estado de edad dorada la igualdad entre la inversión y el ahorro de las dos clases sociales, se escribiría:

$$g \frac{1}{R} = r \frac{1}{R} = s_c r \frac{1}{R} + s_w w$$

Y teniendo en cuenta la ecuación distributiva fundamental: $r = R(1-w)$, obtenemos:

$$s_w w = (1 - s_c)(1 - w)$$

que demuestra el teorema.

El resultado anterior es importante, porque dadas las respectivas propensiones al ahorro de cada clase social, la distribución debe ser tal que se cumpla el resultado anterior. Esto quiere decir que la *distribución de equilibrio*, cuando la economía crece financiada por el ahorro de las dos clases sociales, *tiene que estar determinada por dichas propensiones al ahorro.*

En efecto, despejando w de la última ecuación:

$$w = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-s_c} s_w}$$

Y de la ecuación distributiva fundamental:

$$r = \frac{s_w R}{s_w + (1 - s_c)}$$

La distribución de equilibrio será tanto más perjudicial para los trabajadores cuanto más altas sean las propensiones al ahorro de ambas clases sociales. Por otra parte, una vez fijada dichas propensiones al ahorro, la distribución permanecerá invariable

mientras no cambie la técnica.

8.5. El camino geodésico de Ramsay

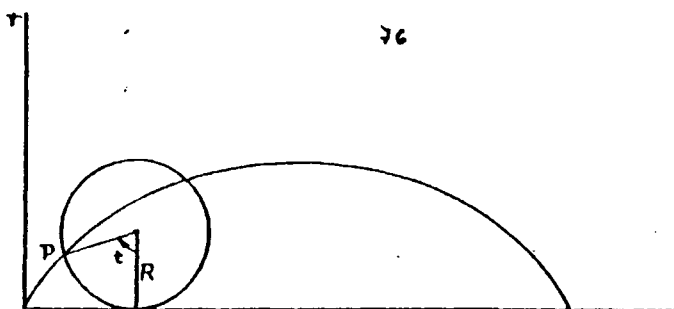
La trayectoria de crecimiento de Ramsay¹⁰ prescribe el ahorro el ahorro óptimo para llevar en el menor tiempo posible la utilidad del consumo a un punto de saturación, o el stock de capital a un volumen deseado.

Si el objetivo es alcanzar la máxima utilidad del consumo, la regla de Ramsay nos dice que la tasa de ahorro, multiplicada por la utilidad marginal del consumo, debe ser igual a la diferencia entre la tasa ideal de consumo (bliss) y la tasa de utilidad neta disfrutada realmente.

Si, por el contrario, el objetivo es alcanzar un stock deseado de capital (K^*) a partir de una cantidad inicial $K_0 < K^*$, la regla de ahorro óptimo sería, en palabras de Samuelson, 'entregarse a la formación de capital a una tasa \dot{K} que sea siempre una función creciente de la discrepancia $K^* - K$ en cada momento'.

Ambas reglas pueden resumirse diciendo que la senda de crecimiento de Ramsay tiene las propiedades de una *cicloide*. La cicloide es la geodésica que permite desplazarse más rápidamente de un punto a otro.¹¹ Pero, además, el movimiento pendular a lo largo de una cicloide tiene la propiedad de ser *isócrono* (el período es independiente de la amplitud de la oscilación). Esta propiedad la descubrió Huyghens cuando trataba de construir un reloj exacto.¹² En consecuencia, el movimiento pendular a lo largo de una cicloide se 'ralentiza' en el extremo del arco que describe: tanto más tiempo cuanto menor es la longitud que tiene que recorrer. Si suponemos que la economía se mueve a lo largo de la senda de Ramsay para alcanzar un equilibrio de crecimiento, permanecerá la mayor parte del tiempo en las proximidades de dicho equilibrio. Esto es precisamente lo que afirma el teorema catenario de 'turnpike', de Samuelson, que como vemos resulta ser 'una reminiscencia formal del Principio de Huyghens en Física'.¹³

La cicloide es la curva descrita por un punto fijo de un círculo que rueda en línea recta:



Es fácil deducir por la figura la ecuación de la cicloide en función del radio del círculo (R) y de la velocidad angular (t):

$$r = R(1 - \cos t)$$

Sea ahora R la razón patrón asociada con la técnica del sistema, y hagamos $\cos t = w$:

$$r = R(1 - w)$$

La ecuación de la cicloide refleja entonces la relación distributiva fundamental entre w y r ; con

$$t = \arccos \frac{1}{1 + \frac{s_w}{1 - s_w}}$$

Para que r se eleve hasta su valor máximo , R, lo antes posible debemos hacer variar t desde 0 (o el valor inicial de partida) hasta $\pi/2$, permaneciendo la mayor parte del tiempo en las proximidades de $\pi/2$. Pero como cuando t está próximo a $\pi/2$,

s_w tiene que estar próximo a 1 , cualquiera que sea el valor de s_w , llegamos a la conclusión de que el ahorro óptimo exigido para caminar por la senda de Ramsay se refiere exclusivamente al ahorro procedente de los beneficios. El ahorro salarial, cualquiera que sea su cuantía, afecta de modo insignificante el equilibrio de crecimiento del sistema. Esta asimetría confiere a los perceptores de beneficio un papel preponderante para determinar el equilibrio del sistema y la distribución asociada con dicho equilibrio.

8.6. La teoría de la explotación y la mercancía patrón

En la teoría marxista los beneficios dependen del poder que tiene el dueño de los instrumentos de producción para extorsionar el salario o la duración de la jornada de trabajo.

Marx creyó poder sacar a la luz esta aprehensión sistemática de los frutos del trabajo, oculta tras el ropaje del intercambio de mercancías, usando como herramienta la teoría del valor traba-

jo . A tal efecto dispuso un ingente despliegue teórico que tenía por finalidad explicar lo óbvio. La influencia de Hegel se acusa en esta complacencia de Marx por desvelar constantemente 'realidades ocultas'.¹⁴ Aunque en realidad en este punto -debido en parte a los excesos del capitalismo y en parte a los excesos de la literatura marxista-, pueda verse hoy más claramente el *hecho* de la explotación que la *teoría* de la explotación.

La teoría de la explotación puede reducirse al siguiente experimento:

Supongamos que las mercancías se cambian siempre en razón a sus valores trabajo. Puesto que los valores trabajo son los precios de mercado calculados a un tipo de beneficio nulo, es obvio que valorando de esta manera las mercancías, tendría que desaparecer de la escena todo rastro de beneficio capitalista.

Todos los esfuerzos de Marx se dirigen entonces a convencernos de que *los beneficios sobreviven en el sistema de valor*. Luego esto demuestra que los beneficios no tienen un origen mercantil -no nacen al intercambiar las mercancías a precios favorables-, sino que han de proceder de alguna peculiaridad del modo de producción que se conserva en el sistema de valor.

"Por consiguiente -dice Marx-¹⁵ para explicar la *naturaleza general de los beneficios*, debemos partir del teorema de que por término medio las mercancías se venden en sus valores reales, y que los beneficios se derivan aún vendiéndolas a estos valores, esto es, en proporción a la cantidad de trabajo realizada en ellos".

Y añade: "Si no podemos explicar el beneficio con este supuesto, no lo podemos explicar de ninguna manera".

¿Qué aspecto tiene la teoría de la explotación si en lugar de los valores trabajo, usamos como unidad de medida la mercancía patrón?

La ecuación distributiva básica:

$$I = \lambda + (1 - \lambda)w + \lambda r$$

puede interpretarse ahora como una descomposición del producto en la suma del capital constante más el capital variable más la plusvalía.

Definimos la tasa de plusvalía como la relación entre la plusvalía y el capital variable.¹⁶ Esto es:

$$e = \frac{\lambda r}{(1-\lambda)w}$$

Y teniendo en cuenta que $1 > \lambda > 0$, llegamos al siguiente resultado:

Teorema 4 : El tipo de beneficio es positivo si y sólo si la tasa de plusvalía es positiva.¹⁷

Finalmente, de la definición de la tasa de plusvalía, y de la ecuación distributiva de Sraffa, encontramos la siguiente relación entre w y e :

$$w = 1/1+e$$

Lo que nos dice que los beneficios provienen de la explotación de los salarios. Esto es:

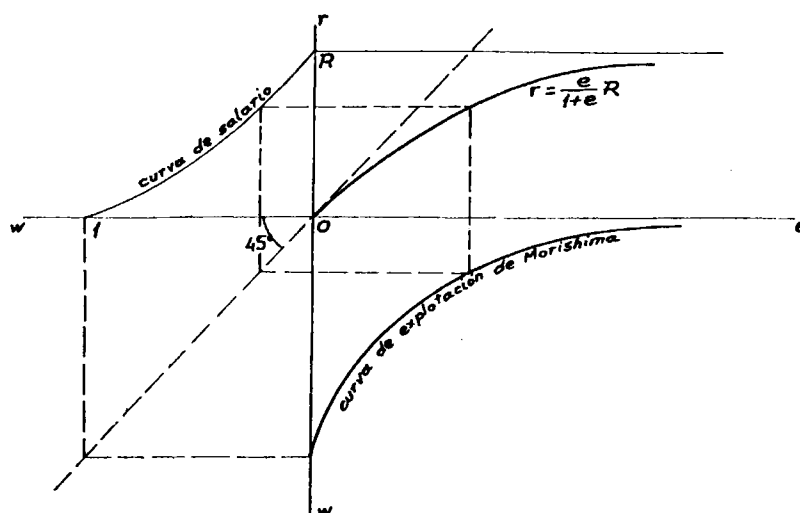
$$1 - w = e.w$$

Solamente el capital variable genera beneficios.

También es fácil de obtener la relación entre el tipo de beneficio y la tasa de plusvalía:

$$r = \frac{e}{1+e} R \quad [3]$$

cuya representación gráfica se hace en el primer cuadrante de la figura a continuación:



Por razones de coherencia teórica hemos transformado la curva del primer cuadrante en la *curva de explotación* de Morishima,¹⁸ que figura en el cuarto cuadrante.

Es fácil ver en la fórmula [3] que una economía de producción simple no puede crecer a su tasa de plusvalía, pues al hacer $r = e$ en dicha fórmula, obtenemos:

$$e = R - 1 < 0$$

lo cual es imposible en una economía capitalista. Por consiguiente, $r < e$.

Podemos enunciar este último resultado diciendo que *la tasa de plusvalía constituye una cota superior del tipo de beneficio*. Veremos que esta restricción juega un papel importante en el equilibrio de producción conjunta.

CAPITULO IX : LA PRODUCCION CONJUNTA

Cuando el maquinismo invade el sector básico, se hace necesario abandonar el modelo de capital circulante que hemos venido usando hasta ahora. Pero al introducir la producción conjunta en el esquema productivo sufren severas limitaciones muchos instrumentos familiares del análisis económico, como la curva de salario, la curva de consumo, los precios de equilibrio definidos para cierto entorno del tipo de beneficio, etc. Los resultados obtenidos con modelos de producción conjunta son escasos; pero bastan sin embargo para 'desacralizar' nociones y hábitos de pensamiento tan arraigados en el economista que a veces pudieran parecerle parte esencial y definitiva de su bagaje intelectual. El que un hecho tan aparentemente trivial como el uso de maquinaria en los procesos básicos, pueda ocasionar semejante revolución en el campo del análisis, debiera hacernos meditar sobre la contingencia y relatividad de las ideas económicas.

9.1. Descripción técnica

Representamos el sistema de producción conjunta mediante el par de matrices no negativas, (A,B) , de orden $m \times n$, cuyas columnas indican respectivamente los inputs y los outputs de cada proceso productivo.

Cuando un proceso no utiliza o no produce una determinada mercancía, aparecerá un cero en el lugar correspondiente de estas matrices. Si B puede transformarse en una matriz diagonal, el sistema es realmente de producción simple.

En general, $m > n$: hay más procesos que mercancías. En equilibrio, sin embargo, el número de procesos es el mismo que el de mercancías! Pero como el descubrimiento de los procesos eficientes forma parte del problema a resolver, en principio puede suponerse que $m > n$.

9.2. El modelo $pA = \rho pB$

Sea el modelo lineal dado por el *sistema de cantidades*:

$$(1+g) A q = B q$$

y su correspondiente *sistema de precios*:

$$(1+r) p A = p B$$

Deseamos saber bajo qué condiciones existe una solución económicamente significativa para ambos sistemas.

Haciendo $(1+r)^{-1} = \rho$, el problema se reduce a encontrar una solución no negativa para la ecuación matricial:

$$p A = \rho p B$$

Y necesitamos un teorema, análogo al de Frobenius, que nos garantice las condiciones de existencia de solución. Tal teorema, debido a Mangasarian², se enuncia a continuación.

9.3. Teorema Ampliado de Frobenius

Si A y B son matrices reales de orden $m \times n$, y se da la que llamaremos *condición débil de Mangasarian*:

$$B q \geq 0 \Rightarrow A q \geq 0$$

Entonces:

(i) La ecuación $pA = \rho pB$ tiene solución para algún $\rho = \lambda \geq 0$ y $p \geq 0$. Si el rango de A o el de B , es n , λ resulta ser la raíz característica mayor de A con respecto a B . En este último caso se tiene además que

-La ecuación $A q = B q$ también tiene solución para algún $\rho = \lambda \geq 0$ y un q tal que $Bq \geq 0$.

(ii) El número real μ para el cual $Aq \geq \mu Bq$ se cumple con un q tal que $Bq > 0$, satisface la desigualdad $\mu \leq \lambda(A_B)$.

(iii) $\lambda(A_B)$ es función creciente de A , en el sentido de que para cualquier otra matriz C tal que $Cq \geq Aq$, se cumple que $\lambda(C_B) \geq \lambda(A_B)$.

(iv)

(v) Si $A \oplus B$ es no singular, $\lambda(A \oplus B) = \lambda(A' \oplus B')$.

9.4. Algunas particularidades de la producción conjunta

Si comparamos las proposiciones del Teorema de Mangasarian con sus correspondientes del teorema original de Frobenius (cfr. nota p.), advertiremos las siguientes particularidades de la producción conjunta:

1. La no negatividad de A se convierte en la condición débil de Mangasarian : $Bq \geq 0 \Rightarrow Aq \geq 0$

La interpretación económica de esta última condición no parece ofrecer dificultades.³ Bq es el vector de mercancías producidas; Aq , el vector de mercancías absorbidas por el sistema. La condición de Mangasarian nos dice simplemente que si el sistema produce cantidades no negativas de cualesquiera mercancías, necesita asimismo inputs de mercancías en cantidades no negativas.

Lo notable de esta condición es que no exige que los outputs y los inputs positivos se refieran a las mismas mercancías. El sistema podría funcionar con inputs no producidos por el propio sistema. Las industrias productoras de estos inputs estarían utilizándose, por así decirlo, con intensidades negativas. Esto nos lleva de la mano a una segunda particularidad.

2. El Teorema no garantiza que el vector q de intensidades de producción, sea semipositivo, sino que es semipositivo el vector de outputs Bq .

En la producción simple el vector de outputs coincidía con el de intensidades de producción. Esto no ocurre en producción conjunta. Los outputs pueden ser positivos ($Bq > 0$) y sin embargo algunas industrias pueden tener intensidades negativas ($q \not\geq 0$). La aparición de cantidades negativas en el vector q de equilibrio, indica que el sistema no puede reproducir todos los inputs que necesita. Algunos deben serles suministrados desde fuera, o bien ser liberados por industrias que operan con intensidades negativas.

Esto no es más que una manera de hablar. Consideremos un sistema formado por dos procesos que transforman huevos y gallinas en huevos. El funcionamiento autosostenido de este sistema requiere que anualmente se le provea de la cantidad de gallinas que necesita y que no puede reproducir. Otra forma de reconocer este hecho es decir que el sistema consigue gallinas para uno de los procesos, haciendo funcionar el otro en sentido inverso. El primero produciría realmente huevos a partir de huevos y gallinas; mientras que el segundo, activado negativamente, 'produciría' huevos y gallinas a partir de los huevos *que se han dejado de producir*. El fondo de la cuestión sigue siendo el mismo: el equilibrio del sistema exige un progresivo endeudamiento en determinada materia prima.

Naturalmente, para que el equilibrio de producción conjunta sea real, y no meramente contable, el vector q ha de ser no negativo. De las condiciones que deben darse para ello nos ocuparemos en

3. *La proposición (v) requiere que A ó B sea no singular.*

El caso en que B es no singular por tener diagonal dominante reviste especial importancia, y será estudiado en . Cuando B tiene diagonal dominante diremos que el sistema de producción conjunta conserva la *especialización industrial* típica de la producción simple.

Aunque en producción conjunta debe hablarse de 'procesos' mejor que de 'industrias', no hay inconveniente en seguir la terminología tradicional cuando el sistema preserva la especialización industrial. Clasificaremos los procesos como pertenecientes a una u otra industria según la mercancías más característica de su producción compuesta. En el sistema habrá n industrias, cada una de las cuales produce un output principal y hasta $n-1$ subproductos.

4. *El Teorema Ampliado de Frobenius carece de la proposición (iv). Por tanto, no asegura la existencia de matriz inversa no negativa, $[\rho B - A]^{-1} \geq 0$, para ningún valor de ρ .*

Este déficit matemático es responsable de todo un mundo de diferencias entre la producción simple y la conjunta. Concretamente, al no existir siempre $[\rho B - A]^{-1} \geq 0$, no pueden obtenerse sin más las curvas de salario ni de consumo, ni expresar los precios de equilibrio en función de las matrices A y B , y del tipo de beneficio.

En 11.5. daremos un método para descubrir los intervalos de r para los que existe la matriz inversa $[\rho B - A]^{-1} \geq 0$, y por tanto curva de salario.

9.5. Los supuestos de von Neumann

J. von Neumann⁴ demostró que el sistema de producción conjunta descrito por las inecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha Aq &\leq Bq & (\alpha = 1+g) \\ \beta pA &\geq pB & (\beta = 1+r) \end{aligned}$$

posee una solución de crecimiento equilibrado : $r = g$, siempre que:

a) Los desequilibrios en la producción se corrijan atribuyendo un precio cero a las mercancías producidas en mayor cantidad que la necesaria. De modo que si para algún j , $q \xi b_{ij} > q \xi a_{ij}$, $p_j = 0$; y si $q \xi b_{ij} = q \xi a_{ij}$, $p_j > 0$. En cualquier caso:

$$\rho(B - \alpha A)q = 0$$

b) Los procesos ineficientes son eliminados en equilibrio, al ser operados con una intensidad nula:

$$\rho(B - \beta A)q = 0$$

c) Todas las mercancías están presentes como inputs o como outputs en todos los procesos:

$$a_{ij} + b_{ij} > 0 \quad (\text{para todo } ij)$$

El modelo de von Neumann demuestra además que el equilibrio de crecimiento del sistema se logra por la acción de la competencia, siempre que los capitalistas se encarguen de apropiarse periódicamente de invertir el excedente.

Como ha demostrado D.Gale⁵, los supuestos a) y b) , más que restricciones del sistema, son propiedades que de todas formas posee la situación de equilibrio. En cuanto a c) , se introduce solamente para garantizar la unicidad de la solución de equilibrio.

Una generalización de las condiciones establecidas por von Neumann para la existencia de crecimiento equilibrado, fué llevada a cabo por D.Gale, y de modo independiente, por Kemeny-Morgestern-Thompson⁶, sustituyendo la mencionada condición c) por estas otras:

c') Todo proceso usa algún input. En otras palabras, toda co-

columna de A tiene al menos un elemento positivo.

c") Toda mercancía es producida por algún proceso. En otras palabras, toda columna de B tiene al menos un elemento positivo.

Y para evitar soluciones no significativas desde el punto de vista económico, se exige además que el valor del producto sea positivo:

$$\rho Bq > 0$$

De manera que ninguna solución consistirá en una tierra de Jauja (todas las mercancías tienen precio cero) ni en un aniquilamiento de los recursos (los outputs son cero).

Sobre estas nuevas bases los citados autores demuestran que el modelo admite más de una solución de crecimiento equilibrado. El número de tasas de crecimiento equilibrado es finito, y en cada una de ellas se verifica que el valor de la producción es positivo.

Podemos ahora formalizar las condiciones c') y c") del modelo generalizado de von Neumann, a efectos de compararla con la condición débil de Mangasarian utilizada en el Teorema Ampliado de Frobenius.

En virtud de c') , la suma de los elementos de cualquier columna de A es positiva. En particular, para todo $q \geq 0$, $Aq \geq 0$

En virtud de c"), para todo $q \geq 0$ tal que $Bq \geq 0$, tenemos $Aq \geq 0$ y $[B-A]q \geq 0$.

Teniendo en cuenta que $[B-A]q \geq 0$ se deduce de la primera desigualdad del modelo de von Neumann, las condiciones c') y c") pueden refundirse en la siguiente:

$$\{q \geq 0 \mid Bq \geq 0 \Rightarrow Aq \geq 0\} \neq \emptyset$$

Esta condición es igual que la de Mangasarian, salvo que ahora exigimos además la no negatividad del vector q de intensidades de producción.

Esto quiere decir que el modelo generalizado de von Neumann puede expandirse en equilibrio sin ninguna dependencia del exterior, pues todos los inputs que necesita el sistema son reproducidos por él mismo.

Llegamos por tanto a la siguiente conclusión. El modelo de producción conjunta de Sraffa: $Aq = \rho Bq$, equivale a un modelo generalizado de von Neumann si y sólo si: a) En las matrices A y B entran solamente los procesos eficientes; b) Dichos procesos efi-

cientes pueden producir todos los inputs necesarios, de manera que el vector q de intensidades de producción es siempre no negativo; c) $\rho Bq > 0$.

9.6. Los aspectos no básicos de la producción conjunta

En producción simple hemos hablado de mercancías e industrias básicas y no básicas. Ahora no podemos llevar esta distinción a un nivel tan elemental. Más que referirnos a las mercancías, hablaremos del carácter básico o no básico de : a) las *subeconomías* existentes en el interior del sistema; b) la *tasa de crecimiento equilibrado* ; c) el *excedente* de producción.

A. La subeconomía básica

Una operación que nos ayudará a descubrir la subeconomía o núcleo básico de un sistema de producción conjunta del tipo von Neumann, es la que permite un teorema demostrado simultáneamente por D.Gale y por K-M-T⁷, según el cual, *para cada posible tasa de crecimiento equilibrado existe un grupo de industrias que forma una subeconomía capaz de crecer independientemente a dicha tasa.*

Para formar las subeconomías del sistema, procederemos de la siguiente forma:

Ordenamos en sentido decreciente las distintas tasas de expansión, que como sabemos están dadas en número finito, digamos r :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$$

Tomamos la tasa más lenta, α_1 . Y asociado a ella, existe un vector solución q^{α_1} de intensidades, y un vector de precios p^{α_1} . Estos vectores pueden tener algunos elementos positivos y otros nulos. Seleccionamos los procesos que tienen componentes positivos en q^{α_1} ; y asimismo las mercancías que tienen precios positivos en p^{α_1} . Con dichos procesos y mercancías formamos el menor M_{α}'' de la matriz $M_{\alpha} = B - \alpha A$. Dicho menor describe la subeconomía asociada con la tasa .

Tomamos a continuación α_2 ; y procediendo del mismo modo formamos el menor M_{α}'' . En dicho menor figurarán las industrias que no estaban incluidas en M_{α}'' y que operan con intensidades positivas cuando el sistema crece a la tasa de expansión α_2 .

Haciendo la misma operación con las restantes α_i , podremos permutar convenientemente las filas y columnas de M_α y escribirla de la siguiente forma:

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} M_\alpha^{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & N_\alpha^1 \\ M_\alpha^{21} & M_\alpha^{22} & 0 & \dots & 0 & N_\alpha^2 \\ M_\alpha^{31} & M_\alpha^{32} & M_\alpha^{33} & \dots & 0 & N_\alpha^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_\alpha^{r1} & M_\alpha^{r2} & M_\alpha^{r3} & \dots & M_\alpha^{rr} & N_\alpha^r \\ L_\alpha^1 & L_\alpha^2 & L_\alpha^3 & \dots & L_\alpha^r & Q_\alpha \end{bmatrix}$$

En los bloques L_α^i aparecen las industrias ineficientes con cualquier solución de equilibrio. Y en los bloques N_α^i las mercancías libres con cualquier tasa de crecimiento equilibrado. Estos procesos y mercancías son radicalmente no básicos.

Los procesos y las mercancías que entran en el menor M_α^{11} constituyen como conjunto el núcleo básico con cualquier situación de equilibrio. En esta subeconomía básica se apoyan los demás núcleos que surgen con tasas de crecimiento más rápidas, como puede verse en la descomposición matricial anterior.

La subeconomía básica es, por construcción, el núcleo autónomo de más lento crecimiento. Este es el equivalente en producción conjunta a la condición de viabilidad de Zaghini.

Si todas las mercancías entrasen en la subeconomía básica, se daría la condición de von Neumann $a_{ij} + b_{ij} > 0$, y la solución de equilibrio sería única.

B. La tasa de crecimiento básica.

La tasa asociada con la subeconomía básica, es la tasa básica de crecimiento. El sistema no podría crecer equilibradamente a una tasa más baja.

Cuando la tasa es no básica⁶, aparecen también subeconomías no básicas. El sistema se llama entonces no regular. Si la tasa de crecimiento es no básica, el tipo de beneficio se eleva por encima de la tasa de crecimiento.

Sin embargo, la disparidad entre r y g no siempre acredita la presencia de subeconomías no básicas. Como veremos a continuación, puede presentarse también como consecuencia de excedentes no básicos.

C. El excedente no básico

El excedente no básico en un modelo tipo von Neumann está constituido por las *cantidades* de mercancías producidas por encima de las necesarias como inputs. A diferencia de las distinciones anteriores, nos encontramos aquí con un criterio puramente cuantitativo para distinguir lo básico de lo no básico. Una misma mercancía puede ser básica hasta una determinada cantidad, y no básica en lo que exceda de ella.

El valor del excedente básico es:

$$p[B - \alpha A]q = pM_k q \geq 0$$

Designemos por f la proporción entre el valor del excedente no básico y el valor de los inputs necesarios:

$$f = \frac{pM_k q}{pAq}$$

Sea ahora $pM_{\beta} q$ el valor de los producido ineficientemente. Y finalmente, sea h la proporción entre el valor de dicha producción ineficiente y el de los inputs:

$$h = \frac{pM_{\beta} q}{pAq}$$

Puede encontrarse que entre r, g, f , y h , existe la siguiente relación:

$$r - g = f - h = \frac{pM_k q - pM_{\beta} q}{pAq} \geq 0 \quad [1]$$

Demostraremos ahora un resultado interesante:

Si no se emplean procesos ineficientes y los capitalistas consumen el excedente no básico de la producción, la relación que se establece entre r y g en producción conjunta es la misma que la de la ecuación de Cambridge.

Dem.: Por definición: $h = 0$ y

$$pM_k q = (1 - s_c) r pAq$$

Sustituyendo en [1]: $r - g = (1 - s_c) r$

$$r = g / s_c$$

q.e.d.

Veamos qué ocurre cuando se activan procesos ineficientes. Pa-

ra que un proceso ineficiente entre en la solución de equilibrio es preciso que esté subvencionado. Como el excedente no básico destinado al consumo capitalista, es el único susceptible de gravamen, supondremos que pagan un impuesto al tipo t , suficiente para subvencionar las pérdidas de los procesos ineficientes. Tendremos, por (1) :

$$r - g = (1 - s_e) r - t r$$

De dónde:

$$r = g / s_e + t$$

Con lo que hemos obtenido el siguiente resultado:

Si se sostienen industrias ineficientes, sufragando las pérdidas mediante un sistema de subsidios, el tipo de beneficio descien- de en la medida en que los capitalistas se ven obligados a reali- zar un ahorro forzoso.

Las anteriores consideraciones sobre los aspectos no básicos del modelo, permiten afirmar que los capitalistas tienen en su mano el poder de mejorar su posición relativa en la distribución (manteniendo el sistema en equilibrio), fomentando tasas de creci- miento y sectores no básicos, y mediante el gasto en el excedente no básico. De aquí que siga habiendo en producción conjunta la misma tendencia que en la producción simple a centrifugar los re- cursos hacia fuera de la subeconomía básica. El 'lujo' continúa siendo en producción conjunta la palanca esencial del crecimiento capitalista.

CAPITULO X : LA EXPLOTACION Y EL FUNCIONAMIENTO DE LA PRODUCCION CONJUNTA.

En hemos visto que en el equilibrio competitivo de la producción simple, el tipo de beneficio es positivo si y sólo si la tasa de explotación es positiva. Morishima¹ ha demostrado que este Teorema Marxiano Fundamental sigue siendo válido también en producción conjunta; es decir, aunque no estén definidos inequívocamente los valores-trabajo de las mercancías. Esto parece sugerir que la tasa de explotación es un concepto más fundamental que el de valor trabajo. En realidad es el único elemento de la teoría del valor trabajo que sobrevive en producción conjunta.

A continuación presentamos un modelo de producción conjunta² que muestra que una tasa de explotación positiva es condición suficiente para la existencia de un equilibrio competitivo.

Definimos las siguientes magnitudes:

\hat{L} = vector de trabajo socialmente necesario contenido en cada unidad de mercancía.³

$f(q) = (q, \hat{L})$ = producto escalar del vector q por el vector .

$f(Aq) = (Aq, \hat{L}) = \hat{L}Aq$ = trabajo socialmente necesario contenido en los inputs.

$f(Bq) = (Bq, \hat{L}) = \hat{L}Bq$ = trabajo socialmente necesario contenido en los outputs.

$$\frac{f(Bq) - f(Aq)}{f(Aq)} = \frac{\hat{L}Bq - \hat{L}Aq}{\hat{L}Aq} = e = \text{tasa de explotación.}^4$$

Teorema 1 : Si $e > 0$, el sistema de desigualdades $(1+g)Aq \leq Bq$, tiene una solución de equilibrio no negativa: $q \geq 0$, $g = e$, correspondiente a un vector \hat{L} de inputs de trabajo socialmente necesario, no negativo y no nulo.

Dem. : Sea el conjunto cerrado, acotado, y convexo :

$$S = \{q/q \in R^n; q \geq 0; (1+g)Aq \leq Bq; f(q) = 1\}$$

Definimos la aplicación sobre S :

$$Tq = q + [Bq f(Aq) - Aq f(Bq)]$$

Si la tasa de explotación es positiva y finita, la expresión

entre corchetes, escrita mejor en la forma: $f(Aq)[Bq - (1+e)Aq]$, es positiva. Luego, $e > 0 \Rightarrow Tq \geq 0$.

Por otra parte, $f(q)=1 \Rightarrow f(Tq)=1$.

Vemos que los vectores transformados según T del conjunto S , pertenecen a S . Puesto que T es una aplicación lineal y por tanto continua, tenemos, por aplicación del teorema del punto fijo, de Brouwer:

$$\exists \bar{q} / \bar{q} \geq 0 \text{ y } T\bar{q} = \bar{q}$$

Para este valor de \bar{q} la expresión del corchete se anula:

$$B\bar{q} = (1+e)A\bar{q}$$

Esta es la solución de equilibrio buscada.

Un resultado análogo es demostrable en el sistema de precios.

Definamos:

p = vector de precios

$g(p) = (p, \bar{q})$ = producto escalar de p por \bar{q} .

$$\frac{g(pB) - g(pA)}{g(pA)} = \frac{pB\bar{q} - pA\bar{q}}{pA\bar{q}} = r = \text{tipo de beneficio.}$$

Teorema 2 : Si $r > 0$, el sistema de desigualdades $(1+r)pA \geq pB$, posee una solución de equilibrio no negativa: $p \geq 0$, $r = e$, correspondiente al vector \bar{q} de intensidades de producción obtenido en el teorema 1.

Dem.: Definamos el conjunto:

$$S = \{p / p \in \mathbb{R}^n : p \geq 0, (1+r)pA \geq pB; g(p) = 1\}$$

y la aplicación continua de S en S :

$$Tp = p + [pAg(pB) - pBg(pA)]$$

Si r es positivo y finito, $p \geq 0 \Rightarrow Tp \geq 0$. Por otra parte, $g(p)=1 \Rightarrow g(Tp)=1$. Y razonando como antes, tendremos que existe un vector $\bar{p} \geq 0$ tal que:

$$(1+r)\bar{p}A = \bar{p}B$$

que es la solución de equilibrio buscada, con $\bar{r} = \frac{\bar{p}B\bar{q} - \bar{p}A\bar{q}}{\bar{p}A\bar{q}}$

10.1. El modelo completo

Los teoremas 1 y 2 nos suministran las piezas necesarias para construir un modelo de producción conjunta del tipo Marx-von Neumann.

En efecto, el teorema 1 afirma que dado

$$e > 0$$

existe solución para $(1+e)Aq \leq Bq$

donde e se define mediante:

$$(1+e)\hat{L}Aq = \hat{L}Bq$$

Luego el submodelo consistente en las tres (in)ecuaciones anteriores, tiene solución significativa.

De la misma manera, el teorema 2 afirma que dado

$$r > 0$$

existe solución para $(1+r)pA \geq pB$

donde r se define por medio de la ecuación:

$$(1+r)pAq = pBq$$

Luego el submodelo formado por las tres últimas (in)ecuaciones, posee solución significativa.

El primer submodelo describe las relaciones de valor-crecimiento. El segundo, las relaciones de precio-distribución. Ambos están ligados por el teorema marxiano fundamental, que hace redundante una de las expresiones: $e > 0$ ó $r > 0$.

Así, pues, un sistema completo puede venir representado de la siguiente manera:

- (1) $e > 0$
- (2) $(1+e)Aq \leq Bq$
- (3) $(1+e)\hat{L}Aq = \hat{L}Bq$
- (4) $(1+r)pA \geq pB$
- (5) $(1+r)pAq = pBq$

El modelo anterior está construido de forma que si existe una solución para (1), automáticamente encuentran solución las restantes (in)ecuaciones. Ello descubre el carácter esencial de la tasa de explotación⁵ para el equilibrio de todo el sistema. Si la economía permite una tasa de explotación positiva, entonces puede crecer sostenidamente a una tasa igual a la de explotación, y existe un sistema de precios y un tipo de beneficio asociados, capaces de sostener descentralizadamente dicho crecimiento.

10.2. Propiedades del modelo

Veamos ahora algunas propiedades de este modelo:

1. *La tasa de explotación desempeña en el modelo la misma función que la razón patrón en la producción simple.*

En efecto, en producción simple e se escribiría:

$$e = \frac{\hat{L}Iq - \hat{L}Aq}{\hat{L}Aq} = \frac{\hat{L}q - \hat{L}\lambda q}{\hat{L}\lambda q} = \frac{1-\lambda}{\lambda} = R$$

Sin embargo, e no es un parámetro puramente tecnológico. En la definición dada por (3), vemos que e depende no sólo de las matrices (A,B), sino también del vector \hat{L} de valores trabajo de las mercancías. Como ha demostrado Morishima, dicho vector varía con la demanda o producto neto del sistema. En consecuencia, el valor de e que se introduce al principio, presupone un determinado vector Y de producto neto para el consumo o la inversión.

2. *El vector \hat{L} que aparece en el modelo es distinto del vector L de trabajo empleado en cada proceso.*

Supongamos el vector factible de producción neta, Y , implicado por la desigualdad (1). Para producir Y sin desperdicio de trabajo, resolveremos el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} & \text{Min } Lq \\ & \text{sujeto a: } Bq \geq Aq + Y \\ & q \geq 0 \end{aligned}$$

Si \bar{q} es la solución óptima, $L\bar{q}$ es el valor trabajo socialmente necesario para producir Y .

De idéntico modo, para calcular \hat{L} , resolveremos n programas del tipo del anterior, sustituyendo sucesivamente Y por cada una de las columnas de la matriz unidad de orden $n \times n$. El vector \hat{L} lo formamos con los valores que toma la función objetivo en cada uno de los anteriores programas.

Si el sistema reproduce alguna mercancía particular en proporciones excesivas, al resolver el correspondiente programa lineal aparecerá un valor trabajo real nulo. La ecuación (3) del modelo dice justamente esto: el valor trabajo socialmente necesario de los bienes producidos en exceso, tiene que ser nulo.

3. El vector \hat{p} de precios de equilibrio se obtiene del dual del programa anterior:

$$\begin{aligned} & \text{Max } pY \\ & \text{sujeto a: } pB \leq pA + \hat{L} \end{aligned}$$

$$p \geq 0$$

Si \hat{p} es la solución óptima, $\hat{p}Y$ es el precio de la producción en términos burgueses. Cuando Y es un vector columna con un 1 en la primera fila y ceros en las restantes, la solución del programa anterior nos da el precio de equilibrio de la primera mercancía. Si sustituimos Y por una columna con 1 en la segunda fila y ceros en las restantes, la solución del programa nos da el precio de equilibrio de la segunda mercancía; y así sucesivamente.

Si hay en el sistema algún proceso ineficiente, en el sentido de que no produce lo suficiente para pagar el trabajo socialmente necesario que requiere, la correspondiente restricción del programa se cumplirá como una desigualdad estricta y el proceso tendrá una intensidad nula. Esto es lo que expresa la ecuación (5): los procesos ineficientes son eliminados al tener una intensidad nula.

4. El precio y el trabajo incorporado directamente al producto neto, son iguales en equilibrio.

Ello es consecuencia del teorema fundamental de la programación lineal. Si \bar{q} es la solución óptima del problema primal y \bar{p} la solución óptima del problema dual, tenemos:

$$L\bar{q} = \bar{p}Y$$

5. Siempre que $e > 0$, existe en equilibrio una proporcionalidad entre el trabajo directo y el precio de los inputs.

En efecto, por la última igualdad:

$$L\bar{q} = \bar{p}Y = \bar{p}(B-A)\bar{q} = r\bar{p}A\bar{q}$$

Ahora bien, si $e > 0$, $r > 0$; y existe una proporcionalidad entre los productos escalares $L\bar{q}$ y $\bar{p}A\bar{q}$. Es decir, entre el trabajo directo y el precio de los inputs a nivel global.

La misma proporcionalidad se da a nivel desagregado, pues si $e > 0$:

$$Lq > 0 \quad \text{y} \quad Aq \geq 0$$

Pero estas dos desigualdades implican, por el Lema de Farkas-Mincowski, que la ecuación

$$pA = L$$

tiene una solución no negativa en p . Lo que demuestra la existencia de la indicada proporcionalidad a nivel desagregado.

Si A es no singular, está claro en la última ecuación que los precios pueden obtenerse como una transformación, según la matriz A^{-1} , de las cantidades de trabajo directo.⁶

6. En el caso particular en que los precios sean proporcionales a los valores trabajo (no al trabajo directo), podemos escribir en lugar de \hat{L} en el subsistema de valor, con lo cual las ecuaciones (2)-(5) se convierten en el modelo de von Neumann. Por su parte, la ecuación (1) implica $pBq > 0$, que es la condición añadida de K-M-T para excluir soluciones triviales.

9.3. Conclusiones

El funcionamiento de este modelo es como sigue. Las condiciones materiales de producción determinan en la economía capitalista una tasa de explotación positiva. Para dicha tasa de explotación positiva existe, por el Teorema 1, un vector no negativo de intensidades de producción, que asegura el crecimiento equilibrado.

Una vez determinado dicho vector en el subsistema de valor, podemos obtener dentro del subsistema de precios el vector p de equilibrio compatible con dicho crecimiento y con el dato distributivo exógeno $r = \bar{r}$ (teorema 2).

La dirección de la causación va desde la tasa de explotación al resto de las variables económicas. Pero tiene un elemento de flexibilidad al incorporar un tipo de beneficio exógeno al pasar de un subsistema a otro. Un cambio de r influye en los precios, pero puede no afectar al equilibrio de crecimiento, con tal que $r \leq e$. En cambio, una variación en la tasa de explotación altera no solamente el equilibrio de crecimiento, sino también los precios. En esta asimetría entre los efectos de r y de e , se revela el carácter básico de la tasa de explotación para la existencia de un equilibrio económico.

La única peculiaridad antimarxista del modelo descrito es aislar el problema distributivo de la tasa de explotación. Una tasa de explotación positiva es una condición *sine qua non* del problema distributivo; de la misma manera que el valor de uso es condición necesaria del valor de cambio. En otras palabras, puede reducirse la jornada de trabajo manteniendo la productividad, sin que ello implique necesariamente una mejora distributiva para los trabajadores.

CAPITULO XI : EL MODELO GENERAL DE SRAFFA

Para dar entrada a los trabajadores en el reparto del excedente, usaremos la ecuación matricial de Sraffa:

$$(1+r)A\rho + Lw = B\rho \quad [1]$$

Los precios de equilibrio no pueden obtenerse ahora escribiendo sin más:

$$\rho/w = [B - (1+r)A]^{-1}L$$

porque no sabemos si la matriz $[B - (1+r)A]$ tiene inversa.

En este capítulo estudiaremos los supuestos que garantizan en este modelo de producción conjunta la existencia de un vector de equilibrio no negativo. Comenzaremos con el caso más simple, que es aquél que permite reconvertir la producción conjunta en un sistema de producción simple. Encontraremos que una condición necesaria para hacer tal transformación es que el sistema *conserva la especialización industrial*. Haciendo intervenir a la tasa de explotación, se demuestra que *el modelo tiene solución significativa si y sólo si el tipo de beneficio se mantiene por debajo de la tasa de explotación*. La última sección se dedicará a exponer un nuevo método para hallar la curva de salario y su campo de definición.

11.1. La especialización industrial en la producción conjunta

Decimos que un sistema de producción conjunta conserva la especialización industrial, cuando cada industria produce de su mercancía principal más que el resto del sistema. En tal caso, la matriz B de outputs tendrá una diagonal dominante, y puede normalizarse de forma que aparezcan unos a lo largo de la diagonal principal, y cantidades menores que uno fuera de ella.

Teorema 1: La especialización industrial es una condición necesaria para transformar un modelo de producción conjunta tipo Sraffa, en otro equivalente de producción simple.

Dem. : Si hay especialización industrial, la matriz B posee una diagonal dominante y, por el teorema de Hadamard, será no singular. Podemos entonces escribir [1] de la siguiente forma:

$$p = [I - (1+r)B^{-1}A]^{-1}B^{-1}L$$

donde los precios se han expresado en términos del salario real.

Siempre que la matriz $X = B^{-1}A$ sea no negativa y que $B^{-1}L \geq 0$, al menos para algún valor de L , tendremos una solución $p \geq 0$, en virtud del teorema de Frobenius aplicado a la última ecuación.

-Enunciemos ahora un resultado debido a Mangasarian, conocido como el teorema de la Caracterización Dual:

La matriz $X = B^{-1}A$ es no negativa si y solo si $qB \geq 0 \Rightarrow qA \geq 0$.

Esta última es la condición débil de Mangasarian ya examinada en 9.4., que establece la viabilidad de producir mercancías sin incurrir en déficit en ningún input.

-Por otra parte, si el sistema es viable, siempre hay un vector $\hat{L} = Aq$ para el cual $B^{-1}\hat{L} \geq 0$.

En efecto, al ser linealmente independientes los procesos contenidos en A , esta matriz es no singular, y podemos escribir $X = B^{-1}A$ de la forma: $B^{-1} = XA^{-1}$.

Sea ahora $\hat{L} \geq 0$ un vector de inputs de trabajo a determinar. Lo transformamos por la matriz B^{-1} y obtenemos:

$$B^{-1}\hat{L} = X(A^{-1}\hat{L}) = \lambda q \geq 0,$$

que es lo que se quería demostrar, pues λ es la raíz de Frobenius de la matriz no negativa X , y q el autovector correspondiente.

-o-

El tránsito de la producción simple a la producción conjunta es el resultado de una innovación tecnológica que permite aprovechar los subproductos. Si todas las industrias de la producción simple sobreviven a la innovación tecnológica que origina la producción conjunta, entonces la nueva situación productiva será en cierta manera prolongación de la anterior, y siempre será posible reconvertir la pro-

ducción conjunta en el sistema inicial de producción simple. Lo que tenemos que hacer es, por tanto, buscar las condiciones bajo las cuales todas las industrias de producción simple sobreviven al cambio técnico consistente en la aparición de subproductos.

Sea el sistema de producción simple:

$$(1+r)Ap = p$$

Y supongamos que, debido a ciertas mejoras técnicas, las industrias experimentan incrementos en su productividad. Si dichos aumentos de productividad no son uniformes en todo el sistema, cada industria tendrá, a los precios antiguos, una rentabilidad distinta. Llamando δ_i al incremento de producción (quizás nulo) de la industria i , y r_i al incremento de su rentabilidad, tendremos ahora la siguiente situación desequilibrada:

$$[I+r_i]Ap = [I+\delta_i]p \quad [2]$$

Si todas las industrias sobreviven, en la nueva situación de equilibrio tendremos:

$$\bar{A}p = \mu p \quad [3]$$

donde $0 < \mu < 1$ es la raíz de Frobenius de la nueva matriz de inputs, \bar{A} , obtenida multiplicando cada fila i de A por $(1+\delta_i)/(1+r_i)$. Para que \bar{A} pueda realmente considerarse como una matriz de inputs, es suficiente con que $r_i < \delta_i$, para todo i . En este caso, $\mu < \lambda$, y por el teorema de Frobenius, $R(\bar{A}) > R(A)$. Lo que nos dice que una condición suficiente para que un sistema industrial de producción simple perdure en equilibrio, tras una innovación técnica consistente en aumentos de productividad, es que dicha innovación permita un tipo general de beneficio (máximo) mayor que antes. Una conclusión en sí misma interesante y por lo demás perfectamente natural.

Supongamos ahora que el cambio técnico consiste en que las industrias crean subproductos que el mismo sistema aprovecha. Una innovación de esta naturaleza es lo que se conoce como producción conjunta. Tras esta innovación los precios antiguos dejan de ser precios de equilibrio, pudiendo representarse la nueva situación mediante la ecuación matricial:

$$[I+r_i]Ap = Bp$$

que no requiere aclaración.

Supongamos ahora por un momento que le sea posible a todas

las industrias, al finalizar el periodo de producción, comprar de las demás industrias todos los subproductos de su propia mercancía. En tal caso, una vez hechas las reasignaciones de los outputs por vía de recompras, el sistema volvería a estar representado por una ecuación como (2); y si la producción conjunta ha supuesto un aumento de la rentabilidad general (potencial) del sistema, la nueva situación de equilibrio podrá expresarse por una ecuación del tipo (3). Es decir, como un sistema de producción simple.

Hemos llegado por tanto a la siguiente conclusión: si el sistema de producción simple puede aprovechar sus propios subproductos sin perjudicar a la rentabilidad potencial del sistema, entonces la producción conjunta que resulta es transformable a producción simple, siempre que cada industria pueda adquirir de las demás los subproductos de su propia mercancía.

Ahora bien, las recompras de subproductos serán factibles a algunos precios, y a otros no. Sin embargo, es fácil comprender que si la cantidad de cada mercancía obtenida como subproducto es menor que la producción directa de esta misma mercancía obtenida por la industria especializada en producirla, entonces cada industria podría comprar los subproductos de su propia mercancía con cualquier sistema de precios. Luego la especialización industrial es una condición suficiente, para transformar si se quiere la producción conjunta en producción simple. Esto completa la prueba del teorema.

Ejemplo: Supongamos el sistema de producción conjunta con especialización industrial:

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

A fin de transformarlo en un sistema equivalente de producción simple, calculamos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & -2/5 \\ -3/5 & 6/5 \end{bmatrix}; \quad X = B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/5 \\ 1/20 & 12/20 \end{bmatrix}; \quad \lambda(X) \approx 1/2; \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,58 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse que $B^{-1}L$ es no positivo. Sin embargo, reasignando el trabajo en la forma indicada por el teorema anterior, obtenemos el nuevo vector de inputs:

$$\hat{L} = Aq = \begin{pmatrix} 0,23 \\ 0,39 \end{pmatrix}$$

para el cual: $(B^{-1}\hat{L})' = [0,12 \ 0,33] > 0$.

Nótese además que $B^{-1}\hat{L} < L$, lo que demuestra que L no era el vector de trabajo socialmente necesario.

El sistema equivalente de producción simple es:

$$(1+r) \begin{pmatrix} 1/6 & 1/5 \\ 1/20 & 1/12 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0,23 \\ 0,39 \end{pmatrix} \cdot w = p$$

El teorema que hemos visto sobre la especialización industrial afirma algo bastante antinatural. En efecto, si cada industria tiene un producto principal y varios subproductos; pero el peso de los subproductos es menor que el de las producciones principales, una simple reasignación del trabajo permitiría que el sistema funcionase como si fuera de producción simple.

Cuando la economía ha venido creciendo sostenidamente bastante tiempo, la situación tiene que ser de *especialización industrial*. Pues entonces los subproductos (por ej., máquinas viejas) nunca pueden llegar a tener en el sistema tanta importancia como la producción de bienes nuevos. Los altos hornos suministrarán más hierro que los chatarreros, y las fábricas de papel, más papel que el que 'subproducen' las oficinas y las economías domésticas. Por consiguiente, la producción conjunta no es ningún inconveniente grave para el equilibrio de una economía que crece sostenidamente.

En cambio, cuando la economía crece de forma aritmética, el sistema puede llegar a perder la especialización industrial. En tal caso el sistema de producción se hace intrínsecamente conjunta. El reciclaje de los subproductos del sistema pasa a convertirse en la principal actividad productiva. Y en estas condiciones pueden aparecer precios negativos. El viejo sistema industrial no sobrevive, y nuevos procesos industriales tendrán que sustituir a los obsoletos, antes de que se alcance un nuevo equilibrio.

11.2. Producción conjunta con cuasi-especialización industrial²

Un sistema de producción conjunta, (A, B) , decimos que tiene cuasi-especialización industrial cuando la matriz $[B-A]$ posee una cuasi-diagonal dominante.

Dicho en otras palabras, si el sistema posee cuasi-especialización, existe una matriz diagonal Q de orden $n \times n$, tal que $Q[B-A]$ tiene una diagonal dominante. Los elementos de la diagonal principal de Q son las intensidades de producción que reclasifican los procesos en *cuasi-industrias*.

Un sistema cuasiindustrial de producción conjunta no es reducible a un sistema de producción simple. Tiene una estructura económica compleja, de la que trataremos de decir algo en esta sección.

Por razones que se verán en seguida, una cuasi-industria está formada por una serie de procesos productivos *encadenados* de una cierta forma. En toda cadena de procesos hay uno que es el más fundamental al ser, por decirlo así, su primer eslabón. Nos referiremos a este proceso particular como el *proceso básico* de la cadena cuasiindustrial.

Para profundizar en la estructura interna del sistema cuasi-industrial, comencemos considerando la matriz $[B-A]$. Puesto que hemos dicho que posee cuasidiagonal dominante, tendrá también matriz inversa $[B-A]^{-1}$, en virtud de un teorema de McKenzie.

Sea ahora la matriz $M = A[B-A]^{-1}$. Puesto que es una matriz real, podemos escribirla en la forma normal de Jordan:

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} p_1^1 \dots 0 \\ p_1^1 \dots 0 \\ \vdots \\ p_1 \end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} p_2^1 \dots 0 \\ p_2^1 \dots 0 \\ \vdots \\ p_2 \end{matrix} & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \begin{matrix} p_r^1 \dots 0 \\ p_r^1 \dots 0 \\ \vdots \\ p_r \end{matrix} \end{array} \right)$$

Las p_i son las raíces características de M , cada una con una multiplicidad igual al orden de cada caja o *célula de Jordan*. Los procesos y las mercancías que entran dentro de cada célula de Jordan constituye lo que hemos llamado antes una *cuasi-industria*. Para simplificar, supondremos que el sistema está formado por una sola *cuasi-industria*. La matriz M tendrá entonces una sola raíz característica, p , con multiplicidad n . La descomposición de Jordan es en este caso:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & p & 1 & \dots & 0 \\ & & p & \dots & 0 \\ & & & \dots & p \end{pmatrix}$$

Evidentemente la matriz Q constituye una *base* del espacio lineal n -dimensional. Llamemos e_1, e_2, \dots, e_n a los vectores (filas) de Q .

Al transformar esta base mediante la aplicación lineal de matriz M , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} e_1 M &= p e_1 + e_2 q_1 / q_2 \\ e_2 M &= p e_2 + e_3 q_2 / q_3 \\ &\dots \dots \dots \\ e_n M &= p e_n \end{aligned} \quad [4]$$

Multiplicando todas las ecuaciones por r , y sumando luego, tenemos:

$$r q M = r p q + r q - r e_1$$

De dónde:

$$\begin{aligned} q - q r M &= q [I - r M] = [I - r p] q - r q + r e_1 \\ q &= [(I - r p) q - r q + r e_1] [I - r M]^{-1} \\ L q &= [(I - r p) L q - r L q + r L q_1] [I - r M]^{-1} \end{aligned}$$

Haciendo igual a la unidad el trabajo directo total, y llamando a al trabajo directo utilizado en el proceso básico de la cadena, tenemos:

$$[I - r M]^{-1} = \frac{1}{1 - (1 + p - a)r} \cdot I$$

Esta es una sorprendente simplificación de la que haremos un uso inmediato.

La no negatividad de $[I-rM]^{-1}$ impone un límite superior al tipo de beneficio:

$$[I-rM]^{-1} \geq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad r \leq \frac{1}{1+\delta} \quad (\delta = \rho - \alpha)$$

Vemos que el trabajo directo utilizado en el proceso básico, es un factor determinante del tipo máximo de beneficio admitido por el sistema. El sentido en que el valor de α influye en el tipo máximo de beneficio, depende de si ρ es positivo o negativo, mayor o menor que α .

Estamos ahora en condiciones de demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2 : *Un sistema de producción conjunta de tipo Sraffa que posea cuasi-especialización industrial, tiene un vector de precios de equilibrio para todo valor de r inferior al tipo máximo de beneficio (definido por $(1+\delta)^{-1}$) y para ciertas tasas de preferencia intertemporal. Además, dicho vector de precios se obtiene como una transformación del vector de trabajo directo.*

Dem. :

$$(B-A)p = (B-A)[B-(1+r)A]^{-1}L = (B-A)[(B-A)(I-rA(B-A)^{-1})]^{-1}L$$

$$(B-A)p = [I-rM]^{-1}L = \frac{1}{1-(1+\rho)r+\alpha r} \cdot L$$

Y puesto que existe $(B-A)^{-1}$:

$$p = \frac{1}{1-(1+\rho)r+\alpha r} \cdot (B-A)^{-1}L$$

Luego p se obtiene como una transformación de L .

Falta demostrar que $p \geq 0$.

Como se supone $r < (1+\delta)^{-1}$, $p \geq 0$ si $(B-A)^{-1} \geq 0$.

Para comprobar esta última desigualdad usaremos el llamado Lema de la Inversión: Si una matriz A tiene no positivos todos sus elementos fuera de la diagonal principal y existe un vector

$u \geq 0$ tal que $Au \geq 0$, entonces tiene matriz inversa y $A^{-1} \geq 0$.

En el caso de la matriz $(B-A)$, sabemos que tiene cuasi-diagonal dominante. Y, como ha demostrado McKenzie, una matriz con cuasi-diagonal dominante tiene también diagonal dominante. Luego, para una adecuada sincronización de las unidades en que se miden los inputs y los outputs (ésto es, para ciertas tasas de preferencia intertemporal), podemos hacer que $(B-A)$ tenga no positivos todos sus elementos situados fuera de la diagonal principal. Como por otra parte existe un vector $q \geq 0$ de intensidades de producción tal que $q(B-A) \geq 0$, el teorema está demostrado.

Cuando el sistema de producción conjunta está compuesto por varias cadenas de procesos cuasi-industriales, los precios de todas las mercancías pueden seguir siendo positivos con tal que cada cuasi-industria mantenga un tipo adecuado de beneficio, *no necesariamente el mismo para todas*. Y puede haber también precios positivos con un tipo uniforme de beneficio, si éste se mantiene por debajo del más restrictivo de los límites máximos impuestos por la estructura interna de cada cuasi-industria.

Otra observación importante, que deriva de la descomposición de Jordan, es que las cuasi-industrias son independientes entre sí. No hay lugar para distinguir cuasi-industrias básicas y no básicas. En cambio, cada cuasi-industria está regida por un *proceso básico*, que juega como hemos visto un papel decisivo en la determinación del tipo máximo de beneficio. Además, un cambio en la intensidad de producción del proceso básico, repercute en la intensidad de los restantes procesos de la cadena. Por el contrario, los cambios de intensidad de los procesos no básicos, sólo repercuten en los eslabones que le siguen, no en los que le preceden. Este efecto se ve claramente en las ecuaciones .

11.3. La tasa de explotación y el equilibrio del sistema

Anteriormente hemos dejado constancia de que los precios de equilibrio de un sistema cuasi-industrial dependen de la tasa de preferencia intertemporal. Esto parece una defección en favor del bando austriaco. Más coherente con el modelo Marx-von Neumann de 10.1 hubiese sido utilizar la tasa de explotación en lugar de la tasa de preferencia intertemporal.

A nuestro juicio, la tasa de explotación es un criterio decisivo para averiguar si un sistema de producción conjunta tipo Sraffa tiene o no solución de equilibrio, tanto si hay especialización o cuasi-especialización, como si no. El siguiente teorema es la prueba.

Teorema 3 : Si $r < e^3$, existe un vector $p \geq 0$ que satisfaga la ecuación $(1+r)pA + L = pB$.

Dem.: En efecto, por el Lema de Farkas-Mincowski,

$$p[B - (1+r)A] = L$$

posee solución semipositiva si y sólo si:

$$\begin{aligned} [B - (1+r)A]q &\geq 0 \\ Lq &> 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, $e > 0 \Rightarrow Lq > 0$, y $r < e \Rightarrow Bq \geq (1+r)Aq^4$.

Podemos ahora diagnosticar la forma del equilibrio según sea la relación entre el tipo de beneficio y la tasa de explotación:

Si $r = e$, el equilibrio es de tipo von Neumann. El salario real es cero, pero no existen ineficiencias productivas.

Si $r > e$, el equilibrio es del tipo Ricardo-Marx, con tasas, subeconomías, o excedentes, no básicos, remolcados por la economía, y posiblemente con procesos ineficientes.

Si $r < e$, el equilibrio vuelve a ser eficiente, pero ahora permite que los trabajadores participen en el reparto del producto neto.

11.4. La curva de salario en producción conjunta

A fin de ver cuales son las posibilidades distributivas cuando $r < e$, debemos averiguar la curva de salario que hay implicada en un sistema de producción conjunta.

Llamamos *curva de salario mínima* a la que relaciona el tipo mínimo de salario real compatible con un tipo dado de beneficio. Dicha curva se obtiene resolviendo el siguiente programa lineal:⁵

$$\begin{aligned} &\text{Min } w \\ &\text{sujeto a : } (1+r)Ap + Lw \geq Bp \\ &\quad p \geq 0 \end{aligned}$$

Burmeister y Kuga han extendido la curva de salario mínima a estados de no equilibrio, con distintos tipos de salario real y distintas tasas internas de retorno para cada industria. También han demostrado que la curva de salario mínima coincide con la curva de salario ordinaria cuando el sistema puede reducirse a producción simple.

Análogamente, podemos obtener la cantidad máxima de consumo *per capita* compatible con una tasa de crecimiento dada, resolviendo:

$$\begin{aligned} & \text{Max } c \\ & \text{sujeto a : } (1+g)qA + cL \leq qB \\ & \quad q \geq 0 \end{aligned}$$

Obtenemos así la llamada *frontera de transformación óptima*, que también puede generalizarse al caso desequilibrado.

Es fácil comprobar que un problema es dual del otro. Por consiguiente, siempre que existan soluciones factibles para uno de estos problemas, y esté acotada la función objetivo del otro, será posible establecer una dualidad producción-crecimiento análoga a la que vimos para la producción simple. Burmeister y Kuga han demostrado que la condición necesaria para que exista solución en ambos programas, es que se requiera una cantidad positiva de trabajo para producir los bienes de consumo y que la cesta de consumo sea fija.

Si el sistema es descomponible, existirán varias curvas de salario mínimo y otras tantas de consumo óptimo. Morishima ha demostrado que en este caso la dualidad entre ambos tipos de curvas es la siguiente: la curva de salario asociada con la subeconomía básica, se corresponde con la curva de consumo más alta; la segunda curva de salario por abajo, es idéntica a la segunda curva de consumo por arriba, y así sucesivamente.

Si el equilibrio es de tipo von Neumann, la curva de salario es decreciente. Esto es consecuencia de un teorema demostrado por K-M-T, según el cual al aparecer una demanda externa de consumo, disminuye la tasa de crecimiento equilibrado a fin de liberar los bienes para la demanda exterior; y si dicha demanda de consumo decrece, aumenta el tipo de crecimiento.

En el caso general en que $r \neq e$, la curva de salario puede tener cualquier forma, estar definida solamente para ciertos intervalos, o no existir en absoluto, en cuyo caso el sistema no es viable. A continuación daremos un método muy sencillo para obtener la curva de salario en los modelos tipo Sraffa.

11.5. Método de obtención de la curva de salario

Consideremos otra vez la ecuación matricial:

$$\{B - (1+r)A\}p = Lw$$

Para encontrar la relación subyacente entre r y w , debemos eliminar p del sistema anterior, restringiendo r a los intervalos para los cuales $p \geq 0$.

Una forma de hacer esto es la siguiente.⁶ Introducimos en cada ecuación una variable de holgura: $[u_1, u_2, \dots, u_n] = u$. Entonces, si el sistema anterior tiene solución no negativa en p , es preciso que el programa lineal:

$$\begin{aligned} & \text{Min } u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ & \text{sujeito a : } \{B - (1+r)A\}p + u = Lw \\ & p \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

tenga valor nulo para la solución óptima.

Todo lo que tenemos que hacer entonces es aplicar el método simplex, comenzando con la solución básica dada por $u > 0$, $p = 0$ y a continuación, ir sustituyendo las u_i por las p_i . Naturalmente, estas sustituciones sólo serán posibles para determinados valores de r . Entonces, la solución por el método simplex no solamente nos permite calcular los valores de p de equilibrio, sino también los intervalos de r dentro de los cuales se obtiene $p \geq 0$. Bastará luego hacer la acostumbrada normalización,⁷ $\sum p_i = 1$, para encontrar la expresión de la curva de salario.

Ejemplo 1 : Hallar la curva de salario del sistema de producción conjunta :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolveremos el siguiente programa:

$$\text{Min } u_1 + u_2$$

$$\text{sujeto a: } (1-5r)p_1 + p_2 + u_1 = w$$

$$3p_1 + (2-10r)p_2 + u_2 = w$$

$$p_1, p_2; u_1, u_2, \geq 0$$

Utilizamos la forma de tabulación de D. Gale :

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
u_1	$1-5r$	1	w	1	0
u_2	3	$2-10r$	w	0	1
$z-b$	$4-5r$	$3-10r$	$2w$	0	0

$$0 < r < 8/10$$

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
u_1	0	$1 - \frac{2}{3}(1-5r)^2$	$\frac{w(2-5r)}{3}$	1	$\frac{1-5r}{3}$
p_1	1	$\frac{2-10r}{3}$	$w/3$	0	$1/3$
$z-b$	0	$1 - \frac{2}{3}(1-5r)^2$	$\frac{w(2-5r)}{3}$	0	$1 - \frac{1-5r}{3}$

$$0 < r < \frac{1\sqrt{3/2}}{5}$$

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
p_2	0	1	*	-	-
p_1	1	0	**	-	-
$z-b$	0	0	-	-	-

$$* \frac{w(2-15r)}{3-2(1-5r)^2}$$

$$** \frac{w}{3} - \frac{w(2+5r)}{3} \cdot \frac{2(1-5r)}{3-2(1+5r)}$$

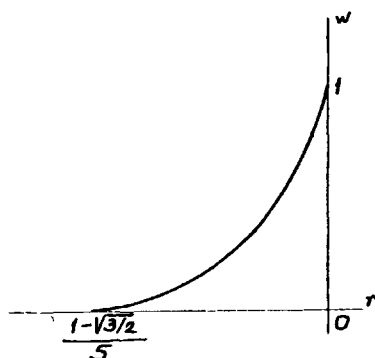
Como es sabido, en un problema de minimización sólo pueden efectuarse sustituciones en el método simplex cuando $z-b > 0$. Luego para poder pasar de la primera table a la segunda, es preciso que $0 < r < 8/10$. De idéntico modo, para hacer la segunda sustitución, y pasar de la segunda table a la tercera, es preciso restringir aún más el campo de variación de r : $0 < r < \frac{1\sqrt{3/2}}{5}$

Los valores de p_1 y p_2 se obtienen en la tabla tercera bajo la columna c . Por razones de espacio se han escrito fuera de la tabla. Haciendo la normalización $p_1 + p_2 = 1$, obtenemos la curva de salario:

$$w = \frac{1+20r-50r^2}{1+15r}$$

válida para el campo de definición:

$$0 < r < \frac{1-\sqrt{3}/2}{5}$$



Como muestra la representación gráfica adjunta, no hay en este caso curva de salario significativa. El sistema inicial no es viable.

Ejemplo 2 : Hallar la curva de salario del sistema de producción conjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/8 \\ 1/6 & 1/4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad wL = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
u_1	$\frac{2-r}{3}$	$\frac{3-r}{8}$	$w/3$	1	0
u_2	$\frac{1-2r}{12}$	$\frac{3-r}{4}$	$2w/3$	0	1
$z-b$	$\frac{3-2r}{4}$	$\frac{7-3r}{8}$	w	1	1

$(0 < r < 3/2)$

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
u_1	$\frac{15-6r}{24}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
p_2	$\frac{1-2r}{9-3r}$	1	$\frac{8w}{9-3r}$	0	$\frac{4}{3}r$
$z-b$	$\frac{15-6r}{24}-1$	1	0		$-\frac{1}{2}$

 $(1/2 < r < 5/2)$

	p_1	p_2	c	u_1	u_2
p_1	1	0	0	*	*
p_2	0	1	$\frac{8w}{9-3r}$	*	*
$z-b$	0	0	$\frac{8w}{9-3r}$	*	*

La curva de salario pedida es:

$$8w = 9 - 3r$$

Y su campo de definición:

$$1/2 < r < 3/2$$

NOTAS

NOTAS AL CAPITULO I :

(1) Para una tersa biografía de D. Ricardo, con una sugestiva evocación de su época, cfr. *David Weatherall, 1976*. Un buen resumen de su actividad parlamentaria se encuentra en *Barry Gordon: Political Economy in Parliament, 1819-1823, Mac Millan, 1976*.

(2) No puede ser desconocido el activo papel de los EE.UU. en el desarrollo de la revolución industrial inglesa; sobre todo transportando mercancías bajo pabellón neutral a los países bloqueados en virtud de las Navigation Acts. Por otro lado, como observa K. Berrill, "de no haber sido por la productividad de las tierras vírgenes de los Estados Unidos la primera Revolución Industrial podría haberse retrasado bastante". Sobre el tema, cfr. *L. Levi: History of British Commerce, Irish Univ. Press, 1971*.

(3) Cfr. *Phyllis Deane: The First Industrial Revolution, Cambridge Univ. Press, 1965*, p. 53, una de las mejores exposiciones de la Primera Revolución Industrial.

(4) *P. Deane, op. cit.*, p. 57.

(5) *E. J. Hobsbawm: Industry and Empire, Pelican, 1968*, p. 48.

(6) Para un estudio de este interesante momento histórico, cfr. *Robespierre: La Revolución Jacobina, Ediciones 62, Barcelona, 1973*, que contiene parte de sus discursos; *G. Rudé: Revolutionary Europe 1783-1815, Harper and Row, 1964*. Del mismo autor: *Robespierre, ed. Prentice Hall*, con discursos, impresiones de sus contemporáneos, y juicio histórico.

(7) *B. Russell: Libertad y Organización (1814-1914), Espasa Calpe, 1970*, p. 232: "Poco a poco, en el correr del tiempo, el industrialismo se hizo más agresivo y más orgulloso y el progreso característico del siglo XVIII pasó a un segundo término. Los capitalistas, al verse libres ya del feudalismo, redujeron su idea de 'libertad' al de la 'libre competencia'".

(8) Existe cierto paralelismo entre los sistemas básico y no-básico ricardianos, por un lado, y el trabajo productivo e improductivo

tivo, por otro. Esta última distinción tiene dos significados, de acuerdo con Shumpeter: "Uno deriva del hecho de que un sistema de empresa privada genera rentas que permiten el consumo de dos formas: directamente, por lo que toca al consumo de los que 'ganan' las rentas, e indirectamente, por lo que atañe al consumo de las personas que son 'sostenidas' por ellos; por ejemplo, niños y ancianos retirados... La otra distinción significativa surge del hecho de que los servicios del trabajo (o de los agentes naturales) comprados directamente y consumidos por las economías domésticas, tales como los servicios de los criados, maestros, y médicos, ocupan en el proceso económico una posición diferente a la que tienen los servicios del trabajo que compran y 'consumen' las empresas y que, económicamente hablando, han de pasar todavía por un proceso comercial" (*J.A. Shumpeter: History of Economic Analysis, Allen and Unwin, 1954, p. 629*).

Por su parte, los trabajadores del sector no-básico están 'sostenidos' por el trabajo del sector básico; por lo que es trabajo improductivo de acuerdo con la primera acepción. Y en cuanto que no genera rentas multiplicativamente en todo el sistema, puede considerarse también como trabajo improductivo, de acuerdo con la segunda acepción.

(9) La industria 'leader' de la Revolución Industrial fué, como se sabe, la industria textil. "Quien dice Revolución Industrial dice algodón" (*Hobbsbawm, op.cit., p. 56*). Y bueno será no olvidar que "la manufactura de algodón, la primera en industrializarse, estuvo esencialmente atada al comercio ultramarino", *ibidem, p. 48*.

(10) A mediados de siglo, según Hobbsbawm, recorrer 20 millas por tierra hacía que se duplicase el precio de la mercancía (*ibidem, p. 45*). Entre 1791 y 1810 se aprobaron cada año en Inglaterra no menos de 55 leyes autorizando la construcción de carreteras. La mayoría de ellas llevaban a Londres ("cualquier persona tenía 1500 oportunidades cada 24 horas de salir de Londres en coche de posta") o conectaba las grandes ciudades, Liverpool, Birmingham, y Manchester. La generalización de los sistemas constructivos de Metcalf, Macadam y Telford, no tuvo lugar hasta más tarde. *Cfr. Deane, op.cit., pp. 69 y ss.*

(11) "La guerra era con mucho el principal consumidor de hierro, y firmas como Wilkinson, los Walkers y Carron Works, debieron

su tamaño a los contratos suscritos con el gobierno para fabricar cañones, mientras que las industrias del hierro del Sur de Gales dependían de las batallas" (*Hobsbawm, op.cit.p.50*). Otros famosos industriales del hierro, como Henry Cort, Henry Maudslay o Mark Isambord Brund, debieron su prosperidad a los contratos con la Armada, de donde muchos de ellos procedían y a la que siempre estuvieron vinculados (*ibidem*).

(13) *Op.cit., p.39.*

(14) D. Ricardo: *Principles of Political Economy and Taxation*, Cambridge Univ. Press, 1953, ed. P. Sraffa, Vol. I, pp.15-20, 31, 48, 348 y 349.

(15) *Ibidem*, p.350.

(16) *Ibidem*, p.33 .

(17) *Ibidem*, p.24. En la p.25 Ricardo hace también un detallado inventario de los oficios no básicos relacionados con la industria del algodón: "Primero está el trabajo necesario para cultivar la tierra donde crece el algodón; segundo, el trabajo de llevar el algodón al país donde se manufacturan los calcetines, que incluye una porción del trabajo incorporado al construir el barco que hace el transporte...; tercero, el trabajo del hilandero y del tejedor; cuarto, una parte del trabajo del ingeniero, el herrero y el carpintero, que levantaron los edificios y la maquinaria, con cuya ayuda se hacen; quinto, el trabajo del comerciante al por menor, y de muchos otros a los que no es necesario seguir mencionando".

(18) "La manufactura del algodón fué un típico subproducto de esa corriente acelerada de comercio internacional y especialmente colonial sin la cual, como hemos visto, la Revolución Industrial no puede explicarse" (*Hobsbawm, op.cit., p.57*). El citado autor es un autorizado exponente de la explicación del industrialismo inglés en función de los mercados extranjeros.

(19) W. Sombart: *Lujo y Capitalismo*, Rev. de Occidente, 1965.

(20) Cfr. B. Mandeville (1714). El título completo de esta notable obra, que escandalizó a su época, es *The Fables of the Bees or Private Vices, Public Benefits*. Se anticipa a Sombart en su diagnóstico del capitalismo: "Thus every part was full of Vice / Yet the whole mass a paradise". Y en otro lugar: "As pride and luxury decrease / so by degrees they leave the seas. / Not merchants now; but Companies / remove Whole manufacturies". B. Franklin menciona en su *Autobiografía* al Dr. Mandeville, al que llegó a conocer, como un 'divertido compañero'.

(21) J.M. Keynes: *The General Theory of Employment, Interest and Money*, 1936, Cap. 23, en especial la segunda parte.

(22) Los datos para redactar este epígrafe están tomados del 'opus magnus' de E.P. Thompson: *The Making of the English Working Class*, Pelikan, 1963. Este estudio está en la línea de los Hammonds. Por lo que respecta a la actitud de los economistas clásicos hacia el problema obrero puede consultarse Lionel Robbins: *Teoría de la Política Económica*, Rialp, 1961, en especial el capítulo titulado 'La condición de la gente'; y más recientemente, el artículo de A. W. Coats: *The Classical Economists and the Labourer*, incluido en *The Classical Economists and Economic Policy*, editado por dicho autor en Methuen & Co., 1971.

(23) Tomado de *An Address to the public of strike-bound Manchester*, escrito por "A Journeyman Cotton Spinner", reproducido por Thompson, *op.cit.*, p.219.

(24) Nadie mejor que J.L. y Barbara Hammond (Cfr. *The Village Labourer 1760-1832*, y *The Town Labourer 1760-1832*, ambos reimprimados en A. M. Kelley, 1967) ha descrito con tanto vigor lo que fueron las condiciones de trabajo de aquella época:

"Catorce o quince horas durante seis días a la semana eran las horas 'regulares'. En días de mucho trabajo las horas eran elásticas y muchas veces llegaban a un número increíble. Trabajar de tres de la mañana a diez de la noche no era raro... Era

físicamente imposible resistir este sistema de trabajo si no se imponía por medio del terror. Los inspectores que informaban ante la Junta de Sadler afirmaban que su método era brutal. Pero les decían que obligaban a trabajar lo estipulado o los destituían, y en estas circunstancias la piedad era un lujo que no podía permitirse un padre de familia. Los castigos por llegar tarde en la mañana eran terribles, para vencer la tentación de los niños, cansados, de quedarse más de tres o cuatro horas en la cama. Un testigo de la Junta de Sadler conoció un niño que había llegado a casa a las once de la noche y se levantó a las dos de la mañana lleno de pánico para irse extenuado a la puerta de la fábrica. En algunas fábricas casi no pasaba una hora sin que sonara el látigo y los quejidos de dolor. Los padres azotaban a sus hijos para librarles de un castigo mayor infligido por los inspectores. En la tarde se exigía tal esfuerzo, que la pesada barra de hierro conocida con el nombre de 'billy roller' no descansaba, y aún acontecía frecuentemente que un niño se adormecía, se caía sobre la máquina y quedaba inválido para toda su vida... En una fábrica donde el propietario, un tal Mr. Gott, no usaba más que una fécula, algunos de los ovilladores obligaban a los niños a cantar himnos para tenerlos despiertos. Al acabar la tarde la pena, la fatiga y la tensión de la mente eran insostenibles. Los niños preguntaban continuamente a los que se acercaban cuántas horas faltaban todavía. Un testigo dijo a la Junta de Sadler que su hijo, un niño de seis años, solía decirle: "Padre, ¿qué hora es?". "Acaso sean las siete", le contestaba. "¡Oh!, dos horas todavía hasta las nueve. No puedo más" : *The Town Labourer*, op. cit., pp.159-160.

(25) B. Russell, op. cit., p.80.

(26) "El molino de mano les trajo a Vds. la sociedad del señor feudal: el molino de vapor, la sociedad del capitalista industrial" (K. Marx). "No obstante sus diferentes juicios de valor, todos los observadores, conservadores, radicales y socialistas, sugirieron la misma ecuación: fuerza de vapor y molino para el algodón = nueva clase trabajadora". E.P. Thompson, op.cit., p.209.

NOTAS AL CAPITULO II :

(1) Si el sistema básico consta de una sola mercancía, como en el *Essay on Profit* (Cfr. *The Works and Correspondence of David Ricardo*, ed. P. Sraffa, Vol IV), es fácil ver que el tipo de beneficio del sistema básico (la agricultura en este caso) es el que regula los beneficios de las demás industrias. Pues al ser dicho tipo de beneficio una fracción, en cuyo numerador y denominador figuran cantidades de una misma mercancía (el trigo), la fracción no cambia aunque varía el precio del trigo. Luego, una vez fijado el tipo de beneficio agrícola, las demás industrias tenderán competitivamente a alinearse con él. Para el caso general de un sistema básico con más de una mercancía, cfr. V.K. Dmitriev: *Economic Essays*, Cambridge Univ. Press, 1974, pp. 59 y ss.

(2) M. Blaug: *Teoría Económica de Ricardo*, ed. Ayuso, p.48.

(3) Cfr. *infra*, sección 8.1.

(4) En una carta dirigida a Mill, el 5 de sept. de 1823, Ricardo reconoce "haber estado pensando mucho sobre el tema últimamente, pero sin hacer muchos progresos". La muerte de Ricardo impidió que el borrador sobre *Absolute Value and Exchangeable Value*, hoy conocido gracias a la diligencia editorial de P. Sraffa (*op. cit.*, Vol IV) adquiriese redacción definitiva.

(5) Cfr. *infra*, sección 8.3.

(6) Cuando todas las mercancías se expresan en la unidad de valor invariable conocida como la mercancía patrón, la curva de salario es una línea recta. Para Ricardo, y para cualquiera, era más fácil demostrar que una recta es descendente, que demostrar que lo es una curva a lo largo de todo su recorrido. Cfr. *infra*, 8.2., #7

(7) La discusión sobre el 'estancamiento' de la economía capitalista ha girado últimamente en torno a los peligros de un *exceso* de capital acumulado, que disipa las oportunidades de seguir in-

virtiendo. Cfr. A. Hansen: *Progreso Económico y Desarrollo Demográfico Decreciente*, 1939, en "Lecturas sobre la Teoría Económica del Desarrollo, Gredos, 1966, con una introducción de L.A. Rojo.

NOTAS AL CAPITULO III :

(1) Cfr. P. Sraffa: *Producción de Mercancías por medio de Mercancías*, ed. Oikos, 1966, p.24. Otro criterio de distinción consiste en asociar los bienes básicos con los bienes de consumo de los asalariados, y los no básicos con los bienes de lujo. Nótese en el siguiente pasaje de Sraffa la fusión de los dos criterios: "Pero ahora cabe la existencia de bienes de 'lujo' que no son utilizados ni como instrumentos de producción ni como artículos de subsistencia en la producción de las demás mercancías" (*op.cit.*, p.23). Sobre este punto, cfr. A. Roncaglia:

Consúltense también la correspondencia cruzada entre P. Newman y P. Sraffa, a propósito de los bienes no básicos, publicada como apéndice al artículo de K. Bharadwaj: *On the Maximum Number of Switches Between Two Production Systems*, Q. J., Symposium, 1966. Según P. Newman la distinción de bienes básicos y no básicos se borra cuando se alcanza un nivel conveniente de agregación. Ello es cierto; pero lejos de significar la irrelevancia de la distinción, nos advierte de los peligros de una excesiva agregación en los modelos económicos.

(2) Y viceversa, si una economía posee una matriz descomponible produce un excedente de lujo. Ello es consecuencia del Lema que afirma que $T \geq 0$ es descomponible si y solo si $Tq \leq \mu q$ para un número real μ y un vector apropiado $q \geq 0$, $\neq 0$ (Cfr. H. Nikaido: *Introduction to sets and mappings in modern Economics*, North Holland, 1972, p.132). Interpretando q como el vector de intensidades de producción de una economía que crece equilibradamente a la tasa g (siendo $\mu = (1+g)^{-1}$), la anterior desigualdad muestra que dicho crecimiento equilibrado requiere asignar intensidades nulas a determinados procesos. Esto indica que existen industrias que no entran directa ni indirectamente

en las restantes.

(3) Cfr. J.G. Kemeny y J.L. Snell: *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, 1960.

(4) Esta transformación de la matriz técnica en la matriz de una cadena de Markov, no es siempre posible. Cfr. R. Solow: *On the Structure of Linear Models*, *Econometrica*, 1952, pp. 42-43.

(5) Cfr. Kemeny, Schleifer, Snell y Thompson: *Finite Mathematics*, Prentice Hall, 1972, p. 227.

(6) E. Zaghini: *Sobre Mercaderías no Básicas*, 1964 (versión esp. en *Rev. Esp. de Ec.*, May-Ag. 1975).

(7) Teorema de Frobenius: Sea A una matriz no negativa.

- (i) A tiene raíces características reales no negativas. Existe un vector no negativo $x \geq 0$ asociado con la mayor raíz característica no negativa $\lambda(A)$.
- (ii) El número real μ , para el cual se cumple $Ax \geq \mu x$ con algún $x \geq 0$, satisface la desigualdad $\mu \leq \lambda(A)$.
- (iii) $\lambda(A)$ es una función creciente de A ; esto es, si $A_1 \geq A_2 \geq 0$, entonces $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$.
- (iv) Sea ρ un número real e I una matriz unidad de orden n . Entonces $\rho I - A$ tiene matriz inversa no negativa $(\rho I - A)^{-1}$ si y solamente si $\rho > \lambda(A)$.
- (v) $\lambda(A) = \lambda(A')$.

Para una demostración de este teorema, cfr. H. Nikaido, *op.cit.*, p. 118.

Si A es indescomponible, el Teorema de Frobenius se cumple sustituyendo en las anteriores desigualdades el signo \geq por el signo $>$. Cfr. Teorema 20.1, p. 135 de H. Nikaido, *op.cit.*

(8) *Works and Correspondence*, *op.cit.*, Introducción, p. 57.

(9) En carta a McCulloch, fechada el 25 de Abril de 1821, Ricardo alude a "un cambio en mis sentimientos respecto a las ventajas de la maquinaria". Y añade: "Estas verdades me parecen tan demos-

trables como cualquiera de las verdades de la geometría, y lo que me asombra es haber estado tanto tiempo sin verlas".

(10) *Op.cit.*, p.388.

(11) *Op.cit.*, p.395.

(12) *Op.cit.*, p.393.

(13) *Op.cit.*, p.394.

(14) Como es sabido, el Prof. Hayek hizo del Efecto-Ricardo el punto fundamental en su explicación del ciclo económico (cfr. *Profits, Interest and Investment*, 3 ed. Routledge & Kegan). Durante la fase de auge aumentan los precios en el sector de bienes de consumo. Este aumento de precios, manteniéndose fijo el salario monetario, amplía el margen de beneficio, deprimiendo los salarios reales. Puesto que el beneficio es el resultado de multiplicar el margen por el número de vueltas que se le da al capital en un año, a los capitalistas les interesará elegir formas de producción elementales, con periodos cortos, a fin de darle al capital más vueltas por unidad de tiempo. Esta acomodación capitalista hará descender la demanda de inversión, produciéndose una crisis por 'escasez' de capital.

La anterior explicación del origen de las crisis económicas, constituyó en su tiempo un abierto desafío a las teorías entonces en boga. Frente a las numerosas teorías de la hiperinversión (competentemente resumidas por G. Haberler en su clásico trabajo *Prosperity and Depression*, Ed. Atheneum, 1963, cap.III), Hayek sostenía que las crisis sobrevinían a consecuencia de la desacumulación capitalista ocurrida durante el auge. Frente a las teorías del subconsumo, Hayek apuntaba al exceso de consumo como responsable de la crisis. Frente a los keynesianos, finalmente, Hayek sostenía el punto de vista desaceleracionista de considerar que la escasez de capital estaba originada por el consumo excesivo.

Una apreciación crítica de la teoría se encuentra en J.Hicks: *El Asunto Hayek*, en *Ensayos Críticos sobre Teoría Monetaria*, Ariel, p.243. Cfr. también, F.A. Hayek: *The Ricardo Effect*, en *Indivi-*

dualism and Economic Order, 1948, Chicago Press (1969). N. Kaldor: *El Profesor Hayek y el Efecto Concertina*, en *Ensayos sobre Estabilidad y desarrollo economicos*, Tecnos. W. Baumol: *The Ricardo Effect in the Point Input-Point output Case*, en *Essays in Mathematical Economics (in honor of Oskar Morgenstern)*, Princeton, 1967. J. Hicks: *Ricardo on Machinery*, en *A Theory of Economic History*, Oxford, 1969.

(15) Ricardo, *op.cit.*, p.

NOTAS AL CAPITULO IV :

(1) P. Sraffa, *op.cit.*, p. 56

(2) Cfr. R.M. Goodwin: *Elementary Economics from the Higher Standpoint*, Cambridge Univ. Press, 1970, p. 16 y ss.

(3) P. Sraffa, *op.cit.* El modelo de producción de mercancías por medio de mercancías, debe considerarse continuación y fruto de la crítica lanzada por Sraffa en 1926, en su artículo *Las Leyes de los Rendimientos en Regimen de Competencia (Incluido en Stigler y Boulding: Ensayos sobre la Teoría de los Precios)*. Cfr. también, P. Sraffa: *Sur les Relations entre cout et quantité produite*, *Annali di Economia*, Università Bocconi, 1925, Milán.

(4) J. Eatwell: *The Irrelevance of Returns to Scale in Sraffa's Analysis*, Univ. Autonoma de Madrid, 1976.

(5) J. H. Clapham: *Las Cajas Vacías Economicas*, 1922, en Stigler y Boulding, *op.cit.*

(6) Alfred Marshall: *Principios de Economía*, 1890, ed. Aguilar, p. 266. En nota a pié de página, Marshall alude a la industria del tejido, como posible contraejemplo de la identificación tipo de rendimiento a escala = tipo de beneficio. Según dicho autor, esta industria debía haber estado operando bajo rendimientos constantes a escala, puesto que se había expandido; dejando de crecer 'porque su vasta escala ha permitido llevar la organización de la producción y de venta a tal extremo que están casi domi-

nadas por la rutina'. Mas la misma explicación podría darse en términos del proceso de formación de un tipo de beneficio uniforme.

(7) H. Nikaido, *op.cit.*, p.124.

(8) D. Ricardo, *op.cit.*, p.134.

(9) Cfr. Leif Johansen: *A Classical Model of Economic Growth*, en *Socialism, Capitalism and Economic Growth* (Essays presented to Maurice Dobb), Cambridge Univ. Press, 1969. L.L. Pasinetti: *A Mathematical Formulation of the Ricardian System*, 1960, *Rev. of Ec. St.* (reproducido en *Growth and Income Distribution*, C.U.P., 1974.

(10) Cfr. O. Lange: *Introducción a la Economía Cibernética*, ed. Siglo XXI, 1969, p.21 y ss.

(11) Cfr. T.R. Malthus: *Primer Ensayo Sobre la Población*, 1798, Alianza, 1970 (título original: *An Essay on the Principle of Population, as it affects the Future Improvement of Society with Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, Mr. Condorcet, and other Writers*).

(12) Valdría la pena sustituir la expresión elíptica 'factor de producción', por algún circunloquio más acorde con su verdadero significado, tal como 'factor reivindicador de producción'. Tendríamos entonces al trabajo como único factor de producción; y según las épocas, al monarca, los prebostes, el capital, la tierra, etc, como 'factores reivindicadores de producción'.

(13) *Op.cit.*, p.5.

(14) Cfr. P. Sraffa, *artículos cit. supra*, nota (3).

(15) Cfr. Paolo Sylos Labini: *Oligopolio e Progresso Tecnico*, Milán: Giuffrè, 1957. Joe S. Bain: *Barriers to New Competition*, Harvard Univ. Press, 1956. Franco Modigliani: *New Developments on the Oligopoly Front*, *Journal of Pol. Ec.*, Jun., 1958.

(16) A. Smith: *La Riqueza de las Naciones*, 1776, ed. esp. Aguilar, 1961 p.68.

(17) J.S. Mill: *Principles of Political Economy*, 1848, Pelikan, Libro IV, Cap.6.

(18) Sobre la función de Liapunov, cfr. el excelente libro de G. Gandolfo: *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, North Holland, 2 ed., 1971, p.368.

(19) Decimos que la función $d(x,y)$ es una distancia entre x e y , si cumple las siguientes propiedades:

$$d(x,y) \geq 0 \quad \text{y} \quad d(x,y)=0 \quad \text{si y solo si} \quad x=y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

NOTAS AL CAPITULO V :

(1) El primer modelo cíclico aplicando ecuaciones Lotka-Volterra a la economía, es el de R.M. Goodwin: *A Growth Cycle*, en *Essays presented to M. Dobb*, op.cit., pp.54-8. Cfr. También G. Gandolfo, op.cit., p.436 y ss.

(2) Cuando medimos el salario en términos de la mercancía patrón, tomada como unidad, el tipo de salario mide a la vez la participación del trabajo en el producto. Sin embargo, cuando existe un sector no básico, tal identificación deja de ser válida, pues la unidad de medida (la mercancía patrón) y el trabajo empleado en la economía, no son iguales. Por ello, debe quedar claro que lo que representa la curva de salario efectiva es una relación entre r y el tipo de salario.

(3) Cfr. Kemeny y Snell: *Mathematical Models in the Social Sciences*, MIT Press, 2ª ed., 1973, p.24 y ss. También G. Gandolfo, op.cit., p.409 y ss.

(4) Cfr. M. Morishima: *Teoría del Crecimiento Económico*, 1969 (versión esp., ed. Tecnos, 1973), p.285 y ss.

NOTAS AL CAPITULO VI:

(1) N. Kaldor: *Alternative Theories of Distribution*, *Rev. of Ec. St.*, 1955-56. J. Robinson: *The Accumulation of Capital*, 1956, p. 255. D.G. Champernowne: *Capital Accumulation and the Maintenance of Full Employment*, *Ec. Journal*, 1958. R.F. Khan: *Exercises in the Analysis of Growth*, *Oxford Ec. Papers*, 1959. M. Morishima: *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford, 1964, p. 144 y ss. L.L. Pasinetti: *Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth*, *Rev. of Ec. St.*, 1962.

(2) J. Meade: *The Rate of Profit in a Growing Economy*, *Ec. Journ.*, 1963. L.L. Pasinetti: *Professor Meade's Rate of Profit in a Growing Economy*, *Ec. J.*, 1964. J.E. Meade y F.H. Hahn: *The Rate of Profit in a Growing Economy*, *Ec. J.*, 1965. L.L. Pasinetti: *The Rate of Profit in a Growing Economy: A Reply*, *Ec. J.*, 1966. P.A. Samuelson y F. Modigliani: *The Pasinetti Paradox in Neoclassical and More General Models*, *Rev. of Ec. St.*, 1966. L.L. Pasinetti: *New Results in an Old Framework: Comment on Samuelson and Modigliani*, *Ev. of Ec. St.*, 1966. N. Kaldor: *Marginal Productivity and the Macroeconomic Theories of Distribution: Comment on Samuelson and Modigliani*, *Rev. of Ec. St.*, 1966. P.A. Samuelson y F. Modigliani: *Reply to Pasinetti and Robinson*, *ibidem*, 1966.

(3) E.D. Domar: *Capital Expansion, Rate of Growth and Employment*, *Econometrica*, 1946. R. Harrod: *Essay in Dynamic Theory*, *Ec. J.*, 1939.

(4) De $r = \alpha g / s_w$, $\bar{r} = g / s_c$, y $s_w > \alpha s_c$, se deduce:
 $r < \bar{r}$.

(5) Cfr. J.E. Meade: *The Outcome of The Pasinetti Process: A Note*, *Ec. J.*, 1966. Cfr. también la representación neokeynesiana del teorema de Pasinetti, que da N.F. Laing en *Two Notes On Pasinetti Theorem*, *Ec. Record*, 1969.

(6) G.C. Harcourt: *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, C.U.P., 1972, p. 221 y ss.

(7) Ian Steedman: *The State and the Outcome of the Pasinetti Process*, *Ec.J.*, 1972.

189 v representa la relación capital-producto.

(9) N.Kaldor: *Marginal Productivity...*, *op.cit.*

(10) R.L.Marris: *Why Economics needs a Theory of the Firm*, *Ec.J.*, 1971.

(11) Andrea Maneshi: *The Existence of A Two Class Economy in Kaldor's and Pasinetti's Model of Growth and Distribution*, *Rev. of Ec. St.*, 1974.

(12) K.Sato: *The Neoclassical Theorem and Distribution of Income and Wealth*, *Rev. of Ec. St.*, 1966.

(13) P. Balestra y M. Baranzini: *Some Optimal Aspects in a Two Class Growth Model with a Differentiated Interest Rate*, *Kyklos*, 1971. El modelo de estos autores utiliza funciones de producción y un tipo de retribución del capital poseído por los trabajadores, distinto (inferior) al tipo de retribución que obtienen los capitalistas. Demuestran que en tales condiciones la productividad marginal del capital depende de todos los parámetros del modelo. La ecuación de Pasinetti se obtiene añadiendo el supuesto adicional de maximizar el consumo de los trabajadores.

(14) Paolo Pattenati: *Keynes Monetary Theory and the Neo-Keynesian Theory of Distribution*,

$$(15) \quad \frac{\dot{K}_c}{K_c} - \frac{\dot{K}_w}{K_w} = s_c f'(k) - \frac{s_w}{K_w} (f(k) - K_c f'(k))$$

$$\frac{\dot{K}_c}{K_c} - \frac{\dot{K}_w}{K_w} > 0 \quad \text{si} \quad s_c f'(k) > \frac{s_w}{K_w} (f(k) - K_c f'(k))$$

$$\text{o bien si: } \frac{s_c}{s_w} > \frac{K}{K_w} \cdot \frac{1}{\alpha(k)} - \frac{K_c}{K_w}$$

Y teniendo en cuenta que $K = K_c + K_w$; $\frac{K}{K_w} = \frac{K_c}{K_w} + 1$, tenemos:

$$\frac{s_c}{s_w} > \frac{k_c}{k_w} \cdot \frac{1}{\alpha(k)} + \frac{1}{\alpha(k)} - \frac{k_c}{k_w} = \frac{k_c}{k_w} \left(\frac{1}{\alpha(k)} - 1 \right) + \frac{1}{\alpha(k)}$$

$$\frac{s_c}{s_w} - \frac{1}{\alpha(k)} > \frac{k_c}{k_w} \left(\frac{1 - \alpha(k)}{\alpha(k)} \right)$$

$$\frac{s_c \alpha(k) - s_w}{s_w \alpha(k)} > \frac{k_c}{k_w} \cdot \frac{1 - \alpha(k)}{\alpha(k)}$$

$$\frac{k_c}{k_w} < \frac{\alpha(k) s_c - s_w}{[1 - \alpha(k)] s_w}$$

(16) Samuelson-Modigliani demuestran también la *estabilidad* de la solución de equilibrio:

Desarrollando por Taylor las ecuaciones [1], en torno al equilibrio (k_c^*, k_w^*) , y recordando que para el estudio de la estabilidad de un sistema en las proximidades del equilibrio pueden tomarse aproximaciones alineales de las ecuaciones, tendremos:

$$\dot{k}_c - k_c^* = \left[\frac{d\dot{k}_c}{dk_c} \right]_{k_c=k_c^*} (k_c - k_c^*) + \left[\frac{d\dot{k}_c}{dk_w} \right]_{k_w=k_w^*} (k_w - k_w^*)$$

$$\dot{k}_w - k_w^* = \left[\frac{d\dot{k}_w}{dk_c} \right]_{k_c=k_c^*} (k_c - k_c^*) + \left[\frac{d\dot{k}_w}{dk_w} \right]_{k_w=k_w^*} (k_w - k_w^*)$$

Para que este sistema sea estable es condición necesaria y suficiente que las raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} s_c f'' k_c - \lambda & s_c f'' k_c \\ -s_w f'' k_c & -s_w f'' k_c + s_w f' - n - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= \lambda^2 + [(s_c - s_w)(-f'') k_c + (-s_w f' + n)] \lambda + [(-s_w f' + n)(-f'') \alpha s_c] = 0$$

tengan parte real negativa. Pero como los coeficientes de la anterior ecuación de segundo grado son positivos (Cfr. Samuelson-Modigliani, loc.cit.), es evidente que λ tiene que tener parte real negativa, a fin de que se anule la última igualdad.

Además, la estabilidad del sistema requiere también un segundo requisito no mencionado por S-M-, cual es que el término independiente de la ecuación característica sea distinto de cero. De lo contrario, $\lambda = 0$ sería una solución de la ecuación. Pero entonces, $f' \neq n/s_w$. Y como $f' = n/s_c$, es inmediato que una condición de estabilidad es también que la propensión al ahorro

de los capitalistas sea distinta de la propensión al ahorro de los trabajadores. El supuesto neoclásico de una propensión al ahorro única, desestabiliza el crecimiento.

Para el caso 'dual', la ecuación característica sería:

$$\begin{vmatrix} s_c f'(k^{**}) - n - \lambda & 0 \\ -s_w f'(k^{**}) & -n - \lambda \end{vmatrix} = s_c f'(k^{**}) (n + \lambda) + (n + \lambda)^2 = C$$

$$\lambda = s_c f'(k^{**}) - n = s_c [f'(k^{**}) - f'(k^*)]$$

Si la función de producción es de buen comportamiento, $f'(k^{**}) < f'(k^*)$ ya que $k^{**} > k^*$. Entonces $\lambda < 0$ en parte real, y el sistema también es estable en torno a este segundo equilibrio.

NOTAS AL CAPITULO VII:

(1) Para una versión moderna de la teoría austriaca, C.C. von Weizsäcker: *Steady State Capital Theory*, Springer-Verlag, 1971.

Un nuevo y más reciente desarrollo se debe a J. Hicks: *Capital and Time (A Neo-Austrian Theory)*, Oxford, 1973. Cfr. también Carl Menger and the Austrian School of Economics, ed. por J. Hicks y W. Weber.

(2) L. Spaventa: *Rate of Profit, Rate of Growth, and Capital Intensity in a Simple Production Model*, Oxford Ec. Papers, 1970. Del mismo autor: *Notes on Problems of Transition Between Techniques*, en *Models of Economic Growth*, eds. J.A. Mirrlees y N.H. Stern, Mac-Millan, 1973. D.J. Harris: *The Theory of Economic Growth: A Critique and Reformulation*, American R., 1975.

(3) La terminología es de J. Robinson, *La Acumulación de Capital*, op.cit.,

(4) Cfr., *infra*, 8.6.

(5) De lo contrario, las oscilaciones en la distribución-crecimiento han de ser muy amplias.

(6) O bien implica grandes oscilaciones cíclicas.

(7) Cfr. K. Baradawj, *op.cit.*

(8) P.A. Samuelson: *Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function*, *Rev. of Ec.St.*, 1962.

(9) Cfr. Anwar Shaikh: *Laws of Production and Laws of Algebra: The Humbug Production Function*, *Rev. of Ec. and Statistics*, 1973.

(10) El concepto de elasticidad de sustitución fué primeramente introducido por J.Hicks en *The Theory of Wages*, 1932, en especial Cap.VI. Para desarrollo y aplicaciones posteriores, cfr. J.Segura: *Funcion de Producción, Macrodistribución y Desarrollo*, Tecnos, 1969.

NOTAS AL CAPITULO VIII:

(1) D. Ricardo: *Absolute Value and Exchangeable Value*, *op.cit.*, Vol. IV, p.368.

(2) *Op.cit.*, p.37 y ss.

(3) Cfr., *infra*, 8.3.

(4) Cfr. las series de C. Neumann en H. Nikaido, *op.cit.*, p.127.

(5) R. Meek: *La Rehabilitación de la Economía Clasica por Sraffa*. Reproducido en *Economía e Ideología*, Ariel, p.267.

(5) J. von Neumann: *A Model of General Economic Equilibrium*, 1938, reproducido en *'Readings in the Theory of Growth'*, ed.F.Hahn, Mac-Millan, 1973.

(6) Cfr. Nikaido, *Op.cit.*, p.241, teorema 35.2.

(7) cfr. Nikaido, *op.cit.*, p.149 y ss.

(8) P.A. Samuelson y C.C. von Weizsacker:

(9) Cfr. E. Wolfstetter: *Plusvalía, Costes de Trabajo Sincronizados y Teoría del Valor-Trabajo de Marx*, 1973, reproducido en *Rev. Esp. de Ec.*, En-Abril, 1975.

(10) F.P. Ramsey: *A Mathematical Theory of Saving*, *Ec. J.*, 1928, reproducido en "Growth Economics", ed. A. Sen, Pelican, y en 'Readings in the Modern Theory of Economic Growth', eds. J.E. Stiglitz y H. Uzawa, MIT, 1969.

(11) Es la solución del problema de la braquistocrona, cfr. Hadley y Kemp: *Variational Methods in Economics*, North Holland, p. 46 y ss.

(12) Cfr. R. Courant y F. John: *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, 1965, Wiley, p. 429 (de la ed. esp.)

(13) P.A. Samuelson: *Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variations*, en 'Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959', Stanford, 196), eds. K.J. Arrow, S. Karlin y P. Suppes.

(14) Cfr. B. Russell: *History of Western Philosophy*, 1946, p. 701 de la ed. 1965.

(15) K. Marx: *Value, Price and Profit*, 1899, ed. A. Leen & Unwin, p. 53.

(16) Tal como ha sido definida en el texto, la tasa de plusvalía está desprovista de las connotaciones ideológicas que tiene en Marx. Cfr. *El Capital*, Vol. I, cap. 9. Simplemente mide la relación entre la parte de producto que se paga en salario ($1-w$), y la que se paga en salario (w), cuando este último se mide en términos de la mercancía patrón. Cfr. la definición de e en producción conjunta, *infra*, cap. X.

(17) M. Morishima: *Marx's Economics*, Cambridge U.P., 1973, p. 53. También N. Okishio: *Nota Matemática sobre los Teoremas Marxianos*, 1963 (en *Rev. Esp. de Ec.*, En-Abril, 1975). M. Morishima: *El Teorema Marxiano Fundamental* Respuesta a Samuelson, *ibidem*.

(18) Morishima, *Marx's Economics*, op.cit.p.64.

NOTAS AL CAPITULO IX :

(1) En un espacio de n mercancías, no puede haber más de n procesos lineales independientes. Si los procesos eficientes se obtienen resolviendo un programa lineal, es sabido que los indicados procesos han de formar un conjunto linealmente independiente entre todos los procesos factibles. Cfr. R.G.D. Allen: *Economía Matemática*, ed. Aguilar, 1965, p.633.

(2) O.L. Mangasarian: *Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$* , Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1971.

(3) $\forall q / Bq \geq 0 \Rightarrow Aq \geq 0$ quiere decir que el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} Bq \geq 0 \\ Aq < 0 \end{array} \right\}$$

no tiene solución. En términos económicos, si el sistema cumple la condición débil de Mangasarian no podrá obtener, con ningún vector de intensidades de producción, outputs positivos a partir de inputs negativos (es decir, con algunos procesos activados con intensidades negativas).

(4) J. von Neumann, op.cit.

(5) D. Gale: *The Closed Linear Model of Production*, en Kuhn y Tucker, 'Linear Inequalities and Related Systems', Princeton, 1956.

(6) J.G. Kemeny, O. Morgenstern y G.L. Thompson: *A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy*, *Econometrica*, 1956.

179 Loc. cit.

(8) Una tasa superior a la básica es una tasa no básica.

(9) Teorema 3, loc.cit. en nota (6).

NOTAS AL CPAITULO X :

(1) M. Morishima: *Consumption-Investment Frontier, Wage-Profit Frontier and the von Neumann growth Equilibrium*, en *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 1971. Del mismo autor: *Marx in the light of Modern Economic Theory*, *Econometrica*, 1974. P. A. Samuelson: *Marx as Mathematical Economist: Steady State and Exponential Growth Equilibrium*, en 'Trade, Stability, and Macroeconomics' (Essays in honor of Lloyd A. Metzler), 1974, Academic Press. M. Morishima: *Marx from a von Neumann Viewpoint*, en "essays in Modern Capital Theory", eds. M. Brown, K. Satp y P. Zarembka, North-Holland, 1976.

(2) La construcción de este modelo me lo sugirió la lectura del artículo de D. Kershaw: *On the Existence of Positive Solutions of $Au = \lambda Bu$* , en *Proceedings of The Edinburgh Math. Society*, 1973.

(3) El vector L se calcula en la forma que se indica en 10.2., 2. Para ello solamente se requieren los datos encerrados en las matrices técnicas A y B , y en el vector L . No hay por tanto petición de principio al introducir L como un dato inicial del modelo.

(4) Esta definición de e es congruente con la que dimos en el caso de la producción simple. Tiene además la ventaja de desempeñar en producción conjunta el mismo papel que tiene la razón patrón en producción simple; esto es, servir de techo al crecimiento del tipo de beneficio. Cfr., infra, 10.2.

(5) Tal como ha sido definida anteriormente.

(6) socialmente necesario.

NOTAS AL CAPITULO XI :

(1) E. Lozano:

(2) Se ha deslizado un error matemático al desarrollar esta sección, lo que obliga a tener que reconsiderarla. En consecuencia este apartado debe considerarse excluido del trabajo.

(3) Nótese que el teorema exige además que la tasa de explotación sea positiva, cualquiera que sea el vector de producto neto.

(4) Ya que $r < e$ implica $\hat{L}B\bar{q} \geq (1+e)\hat{L}A\bar{q}$. Y siendo $\hat{L} > 0$ y $r < e$, $B\bar{q} \geq (1+r)A\bar{q}$.

(5) Cfr. M. Morishima:

(6) La idea de este método me la sugirió la utilización que hace D. Gale del método simplex para obtener soluciones *no-negativas* de sistemas de ecuaciones lineales (D. Gale: *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw, 1960, p. 119.

(7) Más correcto sería hacer la normalización $(p,s)=1$, donde s es el vector de producto neto, en función del cual se construye la curva de salario.

REFERENCIAS

ALLEN, R.G.D.

(1960) *Mathematical Economics*, MacMillan

BALESTRA, P.

(1971) Some Optimal Aspects in a Two Class Growth Model with a
Differentiated Interest Rate, *Kyklos*

BAIN, J.S.

(1956) *Barriers to New Competition*, Harvard Univ. Press

BARANZINI, M (y P.BALESTRA)

(1971) Vide P.Balestra

BAUMOL, W.

(1967) The Ricardo Effect in the Point input point output Case,
*en 'Essays in Mathematical Economics (in honor of Oskar
Morgestern)*, Princeton

BHARADWAJ, K.

(1966) On the Maximum Number of Switches Between Two Production
Systems, *Quarterly Journal, Symposium*

BLAUG, M.

(1958) *Ricardian Economics*, Yale Univ. Press

CHAMPERNOWNE, D.G.

(1958) Capital Accumulation and the Maintenance of Full Employment,
Economic Journal

CLAPHAM, J.H.

(1922) *Las Cajas Vacías Económicas*, reimpresso en Stigler y Boul-
ding: 'Ensayo sobre la Teoría de los Precios', Aguilar

COATS, A.W.

(1971) *The Classical Economists and Economic Policy*, Methuen & Co

COURANT, R.

(1965) *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Wiley & Sons

DEANE, P.

(1965) *The First Industrial Revolution*, Cambridge Univ. Press

DMITRIEV, V. K.

(1974) *Economic Essays*, Cambridge Univ. Press

DOMAR, E. D.

(1946) *Capital Expansion, Rate of Growth and Employment*, *Econometrica* (reimpreso en L. A. Rojo: 'Lecturas sobre la Teoría Económica del Desarrollo', Gredos)

EATWELL, J.

(1976) *The Irrelevance of Returns to Scale in Sraffa's Analysis*, Univ. Autónoma de Madrid

GALE, D.

(1956) *The Closed Linear Model of Production*, en 'Linear Inequalities and Related Systems', Kuhn y Tucker, eds., Princeton

(1960) *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw Hill

GANDOLFO, G.

(1971) *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, North Holland

GOODWIN, R. M.

(1967) *A Growth Cycle*, en "Socialism, Capitalism and Economic Growth (Essays Presented to Maurice Dobb)", Cambridge Univ. Press

(1971) *Elementary Economics from the Higher Standpoint*, Cambridge Univ. Press

GORDON, BARRY

(1976) *Political Economy in Parliament, 1819-1823*, MacMillan

HABERLER, G.

(1937) *Prosperity and Depression*, Harvard Univ. Press

HADLEY, G.

(1971) *Variational Methods in Economics*, North Holland

HAHN, F.

HAHN, F.

(1965) The Rate of Profit in a Growing Economy, *Economic Journal*

HAMMOND, J. L. y BARBARA

(1913) The Village Labourer 1760-1823, *reimpreso por Augustus M. Kelley, 1967*

(1917) The Town Labourer 1760-1823, *reimpreso por A. M. Kelley, 1967*

HANSEN, A.

(1939) Progreso Economico y Desarrollo Demografico Creciente, *reimpreso en A. Rojo: 'Lecturas..', op.cit., Gredos*

HARCOURT, G. C.

(1972) Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital, *Cambridge Univ. Press*

HARRIS, D.

(1975) The Theory of Economic Growth: A Critique and Reformulation, *American Ec. Review*

HARROD, R.

(1939) Essay in Dynamic Theory, *Economic Journal*

HAYEK, F. A.

(1939) Profits, Interest and Investment, *Routledge & Kegan*

(1948) Individualism and Economic Order, *The Univ. Of Chicago Press*

HICKS, J. R.

(1932) The Theory of Wages, *MacMillan*

(1967) Critical Essays in Monetary Theory, *Clarendon Press, versión esp. en Ariel*

(1969) A Theory of Economic History, *Clarendon Press, Oxford*

(1973) Carl Menger and the Austrian School of Economics, *Clarendon Press, Oxford*

(1973) Capital and Time (A Neoaustrian Theory), *Oxford*

HOSBAWM, E. J.

(1968) Industry and Empire, *Red. Pelikan*

JOHANSEN, L

JOHANSEN, L.

- (1967) A Classical Model of Economic Growth, en '*Socialism, Capitalism and Economic Growth (Essays Presented to M. Dobb)*',
op.cit.

JOHN, F.

- (1965) Vide R. Courant

KAHN, R. F.

- (1959) Exercises in the Analysis of Growth, *Oxford Ec. Papers*

KALDOR, N.

- (1955) Alternative Theories of Distribution, *Review of Ec. Studies*
(1960) Ensayos sobre Estabilidad y Desarrollo Economicos, *ed. esp.*
en Tecnos
(1966) Marginal Productivity and the Macroeconomic Theories of
Distribution; Comment on Samuelson and Modigliani, *Review of*
Ec. Studies

KEMENY, J. G.

- (1956) A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding
Economy, *Econometrica*
(1960) Finite Markov Chains, *Van Nostrand*
(1962) Finite Mathematics, *Prentice-Hall*
(1972) Mathematical Models in the Social Sciences, *MIT Press*

KEMP, M. C.

- (1971) Vide G. Hadley

KERSHAW, D.

- (1973) On the Existence of Positive Solutions of $Au = \lambda Bu$, *Proceedings*
of the Edinburgh Mathematical Society

KEYNES, J. M.

- (1936) The General Theory of Employment, Interest and Money, *Mac*
Millan

LAING, N.F.

(1969) Two Notes On Pasinetti Theorem, *Economic Record*

LANGE, O.

(1965) Introducción a la Economía Cibernética, *Siglo XXI*

LEVI, L.

(1872) History of British Commerce, *Irish Univ. Press*

LOZANO, E.

MALTHUS, T.R.

(1798) An Essay on the Principle of Population..., versión
esp. de Alianza

MANDEVILLE, B.

(1714) The Fables of the Bees or Private Vices, Public Benefits, *Pelikan*

MANESHI, A.

(1974) The Existence of A Two Class Economy in Kaldor's
and Pasinetti's Model of Growth and Distribution,
Review of Economic Studies

MANGASARIAN, O.L.

(1971) Perron-Frobenius Properties of $Ax - \lambda Bx$, *Journal of
Mathematical Analysis and Applications*

MARRIS, R.L.

(1972) Why Economics needs a Theory of the Firm, *Economic
Journal*

MARSHALL, A.

(1890) Principios de Economía, versión en esp. en Aguilar

MARX, K.

(1867) El Capital, Vol. I

(1899) Value, Price and Profit, *Allen & Unwin*

MEADE, J.

(1963) The Rate of Profit in a Growing Economy, *Economic Journ.*

(1965) Vide Hahn, F.

(1966) The Outcome of the Pasinetti Process: A Note, *Ec. J.*

MEEK, R.L.

(1967) Economía e Ideología, versión esp. en Ariel

MILL, J.S.

(1848) Principles of Political Economy, ed. *Pelikan*

MODIGLIANI, F.

(1958) New Developments on the Oligopoly Front, *Journal of Pol.
Economy*

(1966) The Pasinetti Paradox in Neoclassical and More General
Models, *Review of Economic Studies*

MORGENSTERN, O.

- (1956) Vide Kemeny, J.G.

MORISHIMA, M.

- (1964) *Equilibrium, Stability and Growth*, Oxford
 (1969) *Teoría del Crecimiento Económico, versión esp.* Tecnos
 (1971) *Consumption-Investment Frontier, Wage-Profit Frontier and the von Neumann Growth Equilibrium*, *Zeitschrift für Nationalökonomie*
 (1973) *Marx's Economics*, Cambridge Univ. Press
 (1974) *El Teorema Marxiano Fundamental: Respuesta a Samuelson*, *Journal of Economic Literature*

NEUMANN, J. von

- (1938) *A Model of General Economic Equilibrium*, reimpreso en F. Hahn: *'Readings in the Theory of Growth'*, MacMillan

NEWMAN, P.

- (1962) *Producción de Mercancías por medio de mercancías*, trad. esp. en *Rev. Esp. de Ec.*, Mayo-Ag. 1975

NIKĀIDŌ, H.

- (1972) *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North Holland

OKISHIO, N.

- (1963) *Nota Matemática sobre los Teoremas Marxianos*, trad. esp. en *Rev. Esp. de Ec.*, En.-Abril, 1975

PASINETTI, L.L.

- (1960) *A Mathematical Formulation of the Ricardian System*, *Rev. of Ec. Studies*
 (1962) *Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth*, *Rev. of Ec. Studies*
 (1964) *Professor Meade's Rate of Profit in a Growing Economy*, *Economic Journal*
 (1966) *New Results in an Old Framework: Comment on Samuelson and Modigliani*, *Rev. of Ec. Studies*

PETTENATI, P.

- (197) *Keynes Monetary Theory and the Neokeynesian Theory of Distribution*,

RAMSAY, F.P.

- (1928) *A Mathematical Theory of Saving*, *Economic Journal*

RICARDO, D.

- (1817) *The Principles of Political Economy and Taxation*, ed.
P. Sraffa y M. H. Dobb: 'The Works and Correspondence of
David Ricardo', en especial Vols. I y IV.

ROBBINS, L.

- (1961) *Teoría de la Política Económica*, trad. esp. en Rialp

ROBINSON, J.

- (1956) *The Accumulation of Capital*, MacMillan

RONCAGLIA, A.

RUDE, G.

- (1964) *Revolutionary Europe 1783-1815*, Harper and Row
(1967) *Robespierre*, Prentice-Hall

RUSSELL, B.

- (1934) *Libertad y Organización 1814-1914*, trad. esp. en Espasa-
Calpe
(1946) *History of Western Philosophy*, Allen and Unwin

SAMUELSON, P. A.

- (1959) *Efficient Paths of Capital Accumulation in Terms of
the Calculus of Variations*, en K. J. Arrow, S. Karlin y P.
Suppes: 'Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959'
Stanford.
(1962) *Parable and Realism in Capital Theory: the Surrogate
Production Function*, *Rev. of Ec. Studies*
(1966) Vide Modigliani, F.
(19)
(1974) *Marx as a Mathematical Economist: Steady State and Ex-
ponential Growth Equilibrium*, en 'Trade, Stability, and
Macroeconomics (Essays in Honor of Lloyd A. Metzler),
Academic Press

SATO, K.

- (1966) *The Neoclassical Theorem and Distribution of Income
and Wealth*, *Rev. of Ec. Studies*

SHAIKH, A.

- (1973) *Laws of Production and Laws of Algebra: The Humbug
Production Function*, *Rev. of Ec. and Statistics*

SEGURA, J.

- (1969) *Función de Producción, Macrodistribución y Desarrollo*,
Tecnos

SCHLEIFER, A.

(1962) Vide Kemeny, J.G.

SHUMPETER, J.

(1954) *History of Economic Analysis*, Allen and Unwin

SMITH, A

(1776) *La Riqueza de las Naciones*, trad. esp. en Aguilar

SNELL, J. L.

(1960) Vide J.G. Kemeny

(1962) Vide J.G. Kemeny

(1972) Vide J.G. Kemeny

SOMBART, W.

(1928) *Lujo y Capitalismo*, trad. esp. en *Revista de Occidente*

SPAVENTA, L.

(1970) *Rate of Profit, Rate of Growth, and Capital Intensity in a Simple Production Model*, *Oxford Ec. Papers*

(1973) *Notes on Problems of Transition Between Techniques*, en J.A. Mirrlees y N.H. Stern: *'Models of Economic Growth'* MacMillan

SRAFFA, P.

(1925) *Sur les Relations entre Cout et Quantité Produite*, *Annali di Economia*, Milán

(1926) *Las Leyes de los Rendimientos en Régimen de Competencia*, en Stigler y Boulding: *'Ensayos sobre la Teoría de los Precios'*, Aguilar

(1960) *Producción de Mercancías por medio de Mercancías*, trad. esp. en *Oikos*

STEEDMAN, J.

(1972) *The State and the Outcome of The Pasinetti Process*, *Economic Journal*

SYOLOS LABINI, P.

(1957) *Oligopolio e Progresso Tecnico*, Giuffrè, Milán

THOMPSON, G. L.

(1956) Vide Kemeny, J.G.

(1972) Vide Kemeny, J.G.

THOMPSON, E. P.

(1963) *The Making of the English Working Class*, 1963

WEATHERALL, D.

(1976) David Ricardo: A Biography, *Martinus Nijhoff, The Hague*

WEBER, W.

(1978) Vide Hicks, J., 'Carl Menger...'

WEIZSACKER, C.C. von

(1971) Steady State Capital Theory, *Springer-Verlag*

(1977) Vide P.A. Samuelson

WOLFSTETTER, E.

(1973) Plusvalía, Costes de Trabajo Sincronizados y Teoría del valor trabajo de Marx, trad. esp. en *Rev. Esp. de Economía, En-Ab.*-1975

ZAGHINI, E.

(1964) Sobre Mercancías no Básicas, trad. esp. en *Rev. Esp. de Ec., May.-Ag.*, 1975

NOTA: Las referencias que anteceden son únicamente las que aparecen citadas en las notas. No tienen por tanto el carácter de una bibliografía seleccionada sobre los temas tratados.

BIBLIOTECA UCM



4800143681